

Calcul intégral, cours, Terminale, Mathématiques complémentaires

F.Gaudon

26 mai 2023

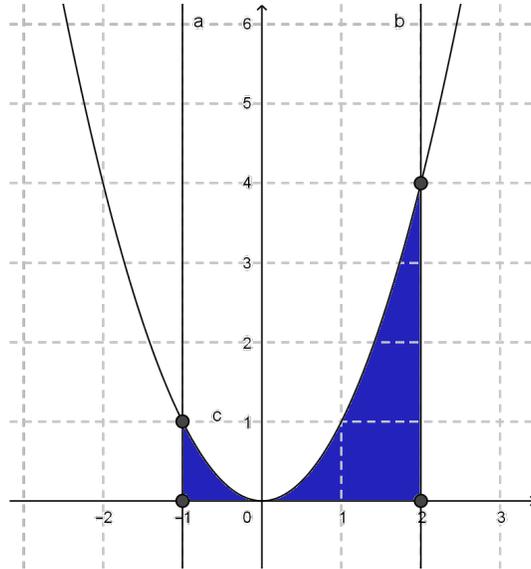
Table des matières

1	Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle	2
2	Primitives d'une fonction continue sur un intervalle	4
3	Calcul de primitives	5
3.1	Primitives de fonctions de référence	5
3.2	Primitives de fonctions composées	5
3.3	Lien entre intégrale et primitives	6
4	Intégrale d'une fonction de signe quelconque	7

1 Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ et \mathcal{C} sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, orthogonal. On appelle *intégrale* de a à b de la fonction f la mesure de l'aire en unité d'aire de la partie \mathcal{A} du plan délimitée par l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ et la courbe \mathcal{C} .
On note $\int_a^b f(t)dt$ cette aire.



Remarques :

- Pour toute fonction continue et positive sur $[a; b]$, on a $\int_a^b f(t)dt \geq 0$;
- Si $b = a$, on a $\int_a^a f(t)dt = 0$;

Relation de Chasles :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a; c]$ et b un réel de I . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Propriété de conservation de l'ordre :

Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a; b]$ telles que pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) \leq g(x)$.
Alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Exemples de méthodes de calcul approché d'intégrales :

- **Méthode des rectangles** : elle consiste à approcher l'aire sous la courbe à l'aide de rectangles :
 - de largeur $h = (b - a)/n$ où $[a; b]$ est l'intervalle d'intégration et n le nombre de subdivisions de l'intervalle;
 - de hauteur l'image de $f(a + i(b - a)/n)$ (rectangles à gauche) ou $f(a + (i + 1)(b - a)/n)$ (rectangles à droites) avec $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ correspondante à l'image des subdivisions par f .

```
def rectanglesGauche(a, b, n, f):
    S=0
    x=a
    h=(b-a)/n
    while x<=b:
        S=S+f(x)*h
        x=x+h
    return S
```

ou

```
def rectanglesDroite(a, b, n, f):
    S=0
    x=a
    h=(b-a)/n
    while x+h<=b:
        S=S+f(x+h)*h
        x=x+h
    return S
```

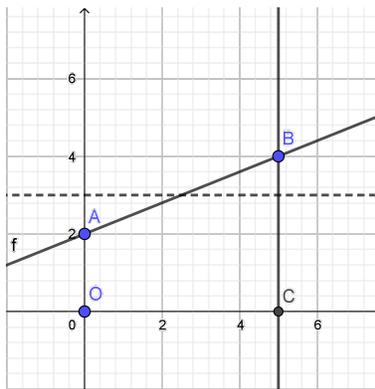
- **Méthode des trapèzes** : Elle consiste à approcher l'aire sous la courbe à l'aide de trapèzes de hauteur $h = (b - a)/n$ et de grands axes et petits axes de longueurs les images $f(a + i(b - a)/n)$ avec $i \in \{1; 2; \dots; n\}$.

```
def trapezes(a, b, n, f):
    S=0
    x=a
    h=(b-a)/n
    while x+h<=b:
        S=S+1/2*(f(x)+f(x+h))*h
        x=x+h
    return S
```

Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a; b]$, le réel

$$\mu = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

**Remarque :**

Si f est positive sur $[a; b]$, la valeur moyenne s'interprète géométriquement comme la hauteur du rectangle de côté $b - a$ et de même aire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

2 Primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée $F' = f$ est appelée *primitive* de f sur I .

Exemple :

$F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto x$ car $F'(x) = x$ pour tout réel x .

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout réel x , $G(x) = F(x) + k$.

preuve :

Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ donc $F - G$ est une constante k .

Exemple :

$F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$ et $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2,5$ sont deux primitives de $x \mapsto x$.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I . Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

preuve :

On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. D'où $G(a) = b$ si et seulement si $F(a) + k = b$ c'est à dire $k = b - F(a)$.

Exemple :

Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur \mathbb{R} telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

Propriété :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Preuve :

Admis

3 Calcul de primitives

3.1 Primitives de fonctions de référence

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	$C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
1	$x + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
x	$\frac{x^2}{2} + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
x^2	$\frac{x^3}{3} + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$x^n, n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C, C \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C, C \in \mathbb{R}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C, C \in \mathbb{R}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}, n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, C \in \mathbb{R}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$\cos(x)$	$\sin(x) + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
e^x	$e^x + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}

3.2 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	Primitives F de f sur I	intervalle I
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$u'e^u$	$e^u + C, C \in \mathbb{R}$	\mathbb{R}
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + C, C \in \mathbb{R}$	I tel que $u > 0$

3.3 Lien entre intégrale et primitives

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f . F est donc l'unique primitive de f qui s'annule en a .

Preuve (cas où f est croissante) :

Pour tout $x_0 \in [a; b]$, $F(x)$ est l'aire sous la courbe \mathcal{C} entre a et x_0 . Soit $h > 0$ tel que $x_0 + h$ appartient à $[a; b]$. On a $F(x_0 + h) = \int_a^{x_0+h} f(t)dt$.

$F(x_0 + h) - F(x_0)$ est l'aire sous la courbe comprise entre l'axe (Ox) et les droites d'équation $x = x_0$ et $x = x_0 + h$.

Cette aire est comprise entre l'aire du rectangle de hauteur $f(x_0)$ et de largeur h et l'aire du rectangle de hauteur $f(x_0 + h)$ et de largeur h .

D'où

$$h \times f(x_0) \leq F(x_0 + h) - F(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$$

et

$$f(x_0) \leq \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$$

. Or f est continue en x_0 d'où $\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

Par le même raisonnement on montre que

$$\lim_{h \rightarrow 0, h < 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$$

ce qui montre que F est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f(x_0)$ et ceci pour tout x_0 de $[a; b]$.

Propriété :

Si f est continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$. On note alors :

$$\int_a^b f(t)dt = [F(x)]_a^b$$

Exemple :

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

4 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Théorème :

Toute fonction continue sur un intervalle $I = [a; b]$ admet une primitive sur I .

Théorème et définition :

Pour toute fonction f continue sur un intervalle I et pour tous les réels a et b de I , on définit l'intégrale de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

où F est une primitive de f sur $[a; b]$.

Preuve :

Soit F_1 et F_2 deux primitives de f . Alors il existe un réel C tel que $F_2 = F_1 + C$. $F_2(b) - F_2(a) = F_1(b) + C - (F_1(a) + C) = F_1(b) - F_1(a)$.

Notation :

On note aussi $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Exemple :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{-5x}{x^2+3} dx &= \int_0^1 \frac{-5}{2} \frac{2x}{x^2+3} dx = \left[\frac{-5}{2} \ln(x^2+3) \right]_0^1 \\ &= \frac{-5}{2} \ln(1^2+3) - \frac{-5}{2} \ln(0^2+3) = \frac{-5}{2} \ln(4) - \frac{-5}{2} \ln(3) = \frac{-5}{2} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \end{aligned}$$

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .

Propriété (relation de Chasles) :

Soit f une fonction continue sur I et a, b et c trois réels de I . Alors :

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$$

Preuve :

Soit F une primitive de f . On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) \\ &= \int_a^c f(x) dx\end{aligned}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

Preuve :

D'une part, $\int_a^a f(x) dx = F(a) - F(a) = 0$ et d'autre part, $\int_a^b f(x) dx + \int_b^a f(x) dx = \int_a^a f(x) dx$ d'où les deux résultats.

Propriété de linéarité de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ et k un réel.

Alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$$

et

$$\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

Preuve :

Soient F et G des primitives de f et g respectivement.

Alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ car $(F + G)' = F' + G' = f + g$

et on a $\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = (F + G)(b) - (F + G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$.

De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x) dx = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k \int_a^b f(x) dx$

Propriété de positivité de l'intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

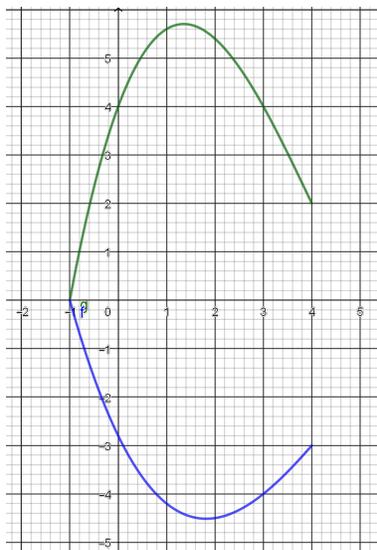
- Si pour tout réel x de I , $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$;
- si pour tout réel x de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

Preuve :

- Si f est positive, alors, $\int_a^b f(x) dx$ est l'aire de la partie de plan comprise entre les droites d'équation $x = a$, $x = b$, $y = 0$ et la courbe \mathcal{C}_f donc est positive.
- Si pour tout x réel de $[a; b]$, $f(x) \leq g(x)$ implique $g(x) - f(x) \geq 0$ c'est à dire que $g - f$ est positive. D'où $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx \geq 0$ d'après le point précédent ce qui s'écrit encore $\int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx$.

Propriété :

- Si f est continue et négative sur $[a; b]$, l'aire exprimée en unités d'aire de la surface plane délimitée par la courbe \mathcal{C}_f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\int_a^b f(x) dx$.
- Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ telles que $f \leq g$, alors l'aire, exprimée en unités d'aire, de la surface comprise entre les deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x) dx$.



Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a; b]$, le réel

$$\mu = \dots\dots\dots$$