Intégration, cours, terminale, Mathématiques complémentaires

1 Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

Définition :

> Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$. ortogonal. On appelle *intégrale* de a à b de la fonction f la mesure de l'aire ....
> ....
> ....
> On note .... cette aire.

Remarques :

- Pour toute fonction continue et positive sur $[a;b]$, on a $\int_a^b f(t)dt \geq ....$;
- Si $b = a$, on a $\int_a^a f(t)dt = ...$;

Relation de Chasles :

> Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $I = [a;c]$ et b un réel de I. Alors :
> ....

Propriété de conservation de l'ordre :

> Soient f et g deux fonctions continues et positives sur $[a;b]$ telles que pour tout $x \in [a;b]$, $f(x) \leq g(x)$.
> Alors ....

Exemples de méthodes de calcul approché d'intégrales :

- **Méthode des rectangles** : elle consiste à approcher l'aire sous la courbe à l'aide de rectangles :
  - de largeur $h = (b-a)/n$ où $[a;b]$ est l'intervalle d'intégration et n le nombre de subdivisions de l'intervalle ;
  - de hauteur l'image de $f(a+i(b-a)/n)$ (rectangles à gauche) ou $f(a+(i+1)(b-a)/n)$ (rectangles à droites) avec $i \in \{1;2;\cdots;n\}$ correspondante à l'image des subdivisions par f.

```
def rectanglesGauche(a,b,n,f):
        S=...
        x=...
        h=...
        while x<=... :
                S=...
                x=...
        return ...
```

ou

```
def rectanglesDroite(a,b,n,f):
        S=...
        x=...
        h=...
        while x+h<=...:
                S=...
                x=...
        return ...
```

- **Méthode des trapèzes** : Elle consiste à approcher l'aire sous la courbe à l'aide de trapèzes de hauteur $h = (b-a)/n$ et de grands axes et petits axes de longueurs les images $f(a+i(b-a)/n)$ avec $i \in \{1; 2; \cdots; n\}$.

```
def trapezes(a,b,n,f):
        S=...
        x=...
        h=...
        while x+h<=...:
                S=S+1/2*(f(x)+f(x+h))*h
                x=...
        return ...
```

Définition :

On appelle *valeur moyenne* de f sur $[a; b]$, le réel

$$\mu = \text{..........}$$

Remarque :

Si f est positive sur $[a; b]$, la valeur moyenne s'interprète géométriquement comme la hauteur du rectangle de côté $b-a$ et de même aire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

cc BY NC SA

2 Primitive d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition :

Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée .... est appelée *primitive* de f sur I.

Exemple :

$F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto x$ car $F'(x) = x$ pour tout réel x.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitve de f si et seulement si ....

Exemple :

$F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$ et $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2,5$ sont deux primitives de $x \mapsto$ ....

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive F telle que ....

Exemple :

Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto$ .... où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc .... d'où ....

Propriété :

Toute fonction f continue et positive sur un intervalle I admet des primitives sur I.

3 Calcul de primitives

3.1 Lien entre intégrale et primitives

Théorème :

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. La fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée ....

Propriété :

Si f est continue et positive sur un intervalle $[A; b]$ alors

$$\int_a^b f(t)dt = \text{....................}$$

où F est une primitive quelconque de f sur $[a; b]$.

3.2 Primitives de fonctions de référence

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	....	$\mathbb{R}$
1	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
x^2	....	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	....	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	....	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	....	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	....	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\sin(x)$	....	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	....	$\mathbb{R}$
e^x	....	$\mathbb{R}$

3.3 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	Primitives F de f sur I	intervalle I
$u'u$	....	$\mathbb{R}$
$u'e^u$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$	....	I tel que $u > 0$

4 Intégrale d'une fonction de signe quelconque

Propriété :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Définition :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et pour tous les réels a et b de I de primitive F, on définit l'intégrale de a à b de f par

$$\int_a^b f(t)dt = \text{.............}$$

On note aussi

.....

.

Exemples : :

- $\int_0^1 x^2 dx = ...$
  ...
- $\int_0^1 e^{5x+4} dx = ...$
  ...

Théorème :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. La fonction F définie sur $[a;b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a;b]$ et a pour dérivée ....

Propriété (relation de Chasles :

Soit f une fonction continue sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

....

Preuve :
Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= \text{..............}\\ &= \text{............}\\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,
- $\int_a^a f(x)\,dx = ...$
- $\int_b^a f(x)\,dx = ...$

Preuve :
D'une part, $\int_a^a f(x)\,dx =$ .... et d'autre part, $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$ d'où les deux résultats.

Propriété de linéarité de l'intégrale :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel. Alors

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \text{................}$$

et

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \text{.......................}$$

Preuve :
Soient F et G des primitives de f et g respectivement. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)' = F' + G' =$ .... et on a $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx =$............. ....

De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x)\,dx =$........... ....

Propriété de positivité de l'intégrale :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$.
- Si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq$ .... ;
- si pour tout réel x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$.... $\int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve :
- Si f est positive, alors, $\int_a^b f(x)\,dx$ est l'aire de la partie de plan comprise entre les droites d'équation $x=a$, $x=b$, $y=0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ donc est positive.
- Si pour tout x réel de $[a;b]$, $f(x) \geq g(x)$ implique $f(x)-g(x)$.....0 c'est à dire que $f-g$ est .... D'où $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$.....0 d'après le point précédent ce qui s'écrit encore $\int_a^b f(x)\,dx$....... $\int_a^b g(x)\,dx$.

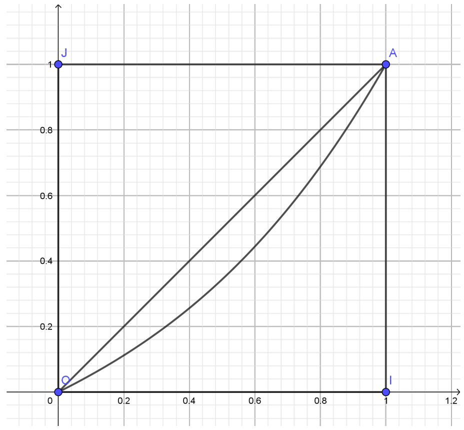
5 Application à la modélisation de situations économiques

Définition :

- Une *courbe de Lorenz* est une représentation graphique qui met en relation la proportion la proportion x% d'une population détentrice d'une part et la proportion y % de la part de la grandeur détenue.
  On la modélise en mathématiques par la représentation graphique une fonction L définie sur $[0;1]$ qui vérifie :
  - $L(0) =$ .... et $L(1) =$ .... ;
  - L est .... et .... sur $[0;1]$;
  - Pour $x \in [0;1]$, $L(x)$......x.
- On appelle *indice de Gini* et on note G le nombre défini par

$$G = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

.



Remarque :
L'indice de Gini varie de 0 à 1. Plus les inégalités sont grandes, plus l'indice de Gini est proche de 0.