

Inférence bayésienne, cours, terminale, Mathématiques complémentaires

1 Rappels sur les intersections et les réunions

Définition :

Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire " A intersection B ") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A *et* B .
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B , c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont disjoints ou incompatibles.
- L'événement $A \cup B$ (lire " A union B ") est l'ensemble des issues qui réalisent A *ou* B , c'est à dire l'un ou l'autre (ou les deux) des deux événements.
- L'événement \bar{A} appelé événement *contraire* ou complémentaire de A est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A .

Propriété :

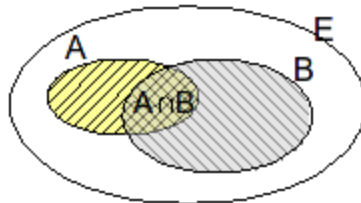
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E .

- Pour tous les événements A et B , on a :

$$P(A \cap B) + P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- En particulier, si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout événement A ,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



2 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A non impossible et tout événement B , on appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* et notée $P_A(B)$ le nombre

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Exemple :

Lors d'un sondage, 50% des personnes interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,4$. Donc $P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0,4}{0,75} \approx 0,53$.

Propriété :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule

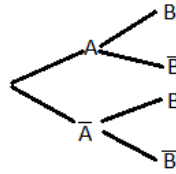
$$P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Propriétés :

Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) = 1$;
- $P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$;
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est à dire ne pouvant pas se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B = \emptyset$) alors $P_A(B) = 0$.

3 Arbre pondérés



Définition :

Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* : $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$. Un *noeud* est un point d'où partent plusieurs branches.

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,

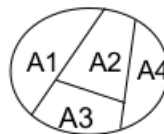
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = 1$);
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$);

4 Partitions et formule des probabilités totale

Définition :

Soient A_1, A_2, \dots, A_n pour $n \geq 1$ des parties non vides d'un ensemble E . On dit que A_1, A_2, \dots, A_n forment *une partition* de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = E$;
- pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; \dots; n\}$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \emptyset$.



Formule des probabilités totales :

Si A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition d'un univers E , alors pour tout événement A de l'univers E :

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$$

ou encore

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$$

En particulier, pour tout événement B ,

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\bar{A})P_{\bar{A}}(B)$$

Remarque :

Sur l'arbre pondéré du paragraphe précédent, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose (par exemple, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$).

5 Indépendance d'événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Propriété :

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$ si et seulement si $P_B(A) = P(A)$, ce qui signifie que la probabilité que l'un des deux événements se réalise ne dépend pas de la probabilité que l'autre se réalise.

Exemple :

On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On appelle A l'événement « on tire un as », T l'événement « on tire un trèfle » et N l'événement « on tire une carte noire ». On a $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(N) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

D'une part $A \cap T$ est l'événement « on tire l'as de trèfle » et $P(A)P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ qui est bien égal à $P(A \cap T)$ ce qui montre que A et T sont indépendants.

D'autre part, $T \cap N$ est l'événement « on tire un trèfle et une carte noire » dont la probabilité est $\frac{1}{4}$ mais on a $P(T)P(N) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(T \cap N)$ ce qui confirme que les événements T et N ne sont évidemment pas indépendants.

Propriété :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors \bar{A} et B sont indépendants et A et \bar{B} sont indépendants .

6 Formule de Bayes

Propriété, formule de Bayes :

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

$$P_B(A) = \frac{P(A) \times P_A(B)}{P(B)}$$

Preuve :

On a $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$ et $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$
 donc $P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$ et $P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.

Conséquence :

Soient A_1, A_2, \dots, A_n une partition de l'univers et B un événement non nul. Alors, pour tout entier i entre 1 et n , on a :

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i) \times P_{A_i}(B)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$$

Preuve :

Découle immédiatement de la formule de Bayes et de la formule des probabilités totales.