

Inférence bayésienne, cours, terminale, Mathématiques complémentaires

1 Rappels sur les intersections et les réunions

Définition :

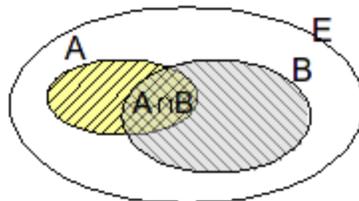
Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire " A B ") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A B .
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B , c'est à dire $A \cap B = \dots\dots\dots$, on dit que A et B sont ou
- L'événement $A \cup B$ (lire " A B ") est l'ensemble des issues qui réalisent A B , c'est à dire des deux événements.
- L'événement \bar{A} appelé événement ou de A est l'ensemble des issues qui

Propriété :

Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E .

- Pour tous les événements A et B , on a :
.....
- En particulier, si A et B sont des événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- Pour tout événement A ,
.....



2 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A non impossible et tout événement B , on appelle *probabilité conditionnelle de B sachant A* et notée $P_A(B)$ le nombre

.....

Exemple :

Lors d'un sondage, 50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = \dots$ et $P(S \cap C) = \dots$. Donc $P_C(S) = \dots$.

Propriété :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule

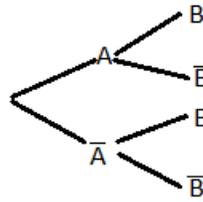
.....

Propriétés :

Pour tous les événements A et B tels que $P(A) \neq 0$:

- $P_A(A) = \dots$;
- $P_A(\bar{B}) = \dots$;
- Si A et B sont des événements incompatibles (c'est à dire ne pouvant pas se réaliser simultanément ou encore tels que $A \cap B = \dots$) alors $P_A(B) = \dots$

3 Arbre pondérés



Définition :

Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* :,, et Un *noeud* est un point d'où partent

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,

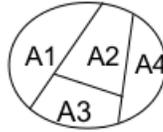
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_A(B) + P_A(\bar{B}) = \dots$) ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) = \dots$) ;

4 Partitions et formule des probabilités totales

Définition :

Soient A_1, A_2, \dots, A_n pour $n \geq 1$ des parties non vides d'un ensemble E . On dit que A_1, A_2, \dots, A_n forment *une partition* de E si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \dots$;
- pour tout $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ et tout $j \in \{1; 2; \dots; n\}$ avec $i \neq j$, on a $A_i \cap A_j = \dots$



Formule des probabilités totale :

Si A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition d'un univers E , alors pour tout événement B de l'univers E :

.....

ou encore

.....

En particulier, pour tout événement A ,

.....

Remarque :

Sur l'arbre pondéré du paragraphe précédent, la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose (par exemple, $P(B) = \dots\dots\dots$).

5 Indépendance d'événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

.....

Propriété :

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$ alors A et B sont indépendants ;si et seulement si $P_A(B) = \dots\dots\dots$ si et seulement si $P_B(A) = \dots\dots\dots$, ce qui signifie que la probabilité que l'un des deux événements se réalise..... de la probabilité que l'autre se réalise.

Propriété :

Si A et B sont deux événements indépendants, alors A et B sont et \bar{A} et \bar{B} sont

6 Formule de Bayes

Propriété, formule de Bayes :

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles. On a :

...

Preuve :

On a $P(A)P_A(B) = \dots$ et $P(B)P_B(A) = \dots$
donc $P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A)$
et $P_B(A) = \dots$

Conséquence :

Soient A_1, A_2, \dots, A_n une partition de l'univers et B un événement non nul. Alors, pour tout entier i entre 1 et n , on a :

...

Preuve :

Découle immédiatement de la formule de Bayes et de la formule des probabilités totales.