Limites de fonctions, cours, terminale, mathématiques complémentaires

F.Gaudon

13 mai 2023

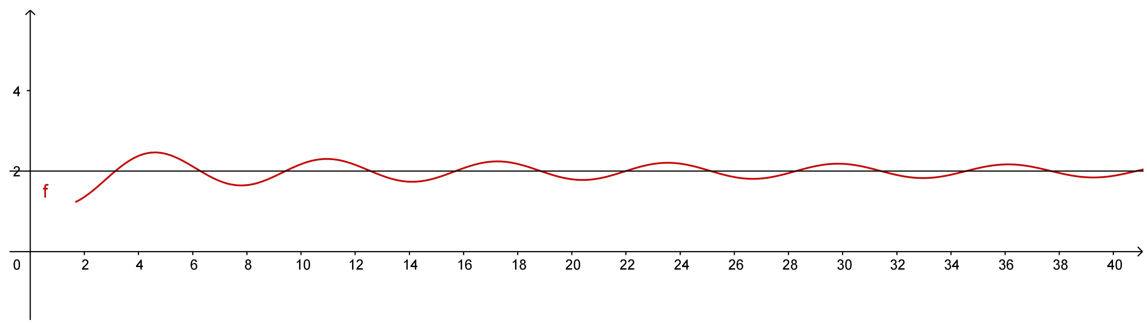
Table des matières

1 Limites finies à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;+\infty[$ ou $]-\infty;a[$ suivant la situation où $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

Soit l un réel. f admet pour limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si pour tout intervalle contenant l, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0 (resp. pour tous les réels x inférieurs à x_0) , $f(x)$ appartient à cet intervalle. On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$).



Propriétés :

Limites de fonctions usuelles :
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ Pour tout entier naturel $k > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$
- Pour tout entier naturel non nul k, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-k} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-k} = 0$
- $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Exemples :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$.

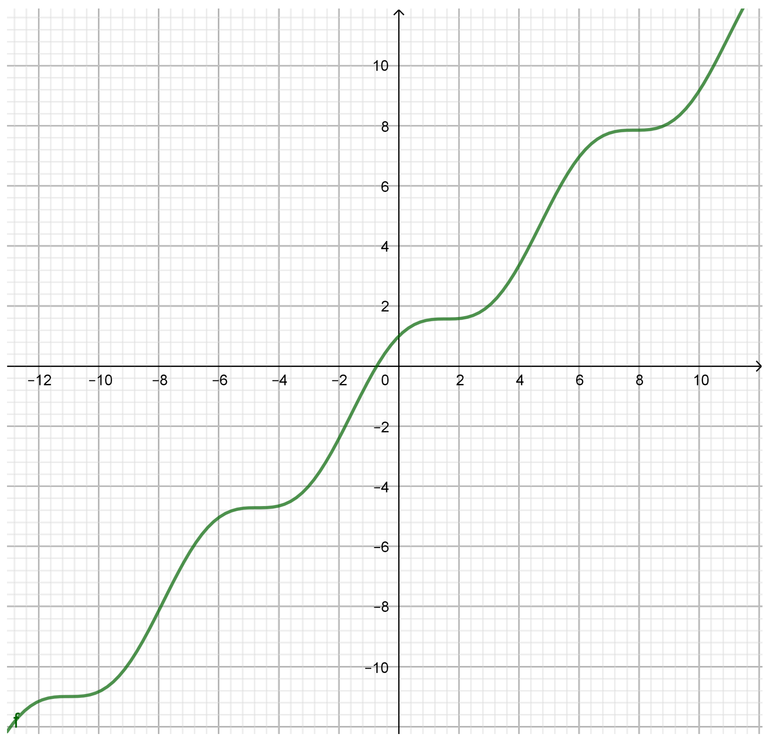
2 Limites infinies à l'infini

Définition :

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$ en $+\infty$) si pour tout intervalle $]M;+\infty[$ (resp. $]-\infty;M]$) où M est un réel, il existe un réel x_0 tel que pour tous les réels x supérieurs à x_0, $f(x) \in]M;+\infty[$ (resp. $f(x) \in]-\infty;M]$).
On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
On définit de même les limites en $-\infty$.

Remarque :
Limites et monotonie ne sont, en général, pas liées.
On peut montrer que pour la fonction :
$f : x \mapsto x + \cos(x)$
on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$
mais que cette fonction n'est pourtant pas croissante.



Propriétés :

Pour tout entier naturel k non nul,

- $\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

3 Limites en un réel

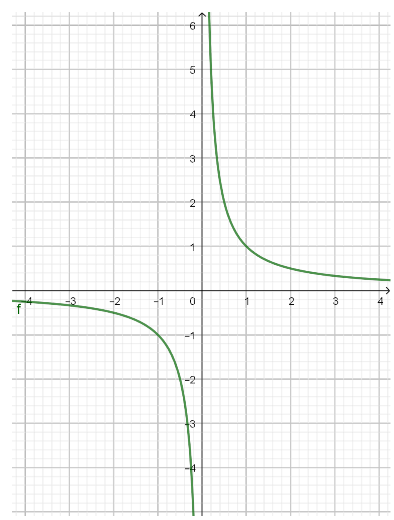
On considère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble D_f et $a \in D_f$ où a est l'extrémité d'un intervalle de D_f.

Définition :

- f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u;v[$ contenant l il existe un réel $x_0 > a$ tel que pour tout $x \in]a;x_0[$ on a $f(x) \in]u;v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u;+\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]a;x_0[$ on a $f(x) \in]u;+\infty[$).
  On note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = +\infty$).
- f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si pour tout intervalle $]u;v[$ contenant l, il existe un réel $x_0 < a$ tel que pour tout $x \in]x_0;a[$ on a $f(x) \in]u;v[$ (resp. si pour tout intervalle $]u;+\infty[$, il existe x_0 tel que pour tout $x \in]x_0;a[$ on a $f(x) \in]u;+\infty[$).
  On note alors $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = +\infty$).

Exemple :

$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$
et $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$.



Définition :

Soit a un réel, $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère. On dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$ si la limite à droite ou la limite à gauche de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition :

On dit que f admet pour limite $+\infty$ en a lorsque pour tout intervalle de la forme $]u;+\infty[$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est assez proche de a. On écrit $\lim_{x \mapsto a} f(x) = +\infty$.

Remarque :

On définit de même $\lim_{x \mapsto a} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \mapsto a} f(x) = l$ où l est un réel.

4 Opérations sur les limites

4.1 Addition, multiplication, quotient

Dans ce qui suit, a est un réel ou $a = +\infty$ ou $a = -\infty$. **Propriétés :**

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to a} (f+g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}*$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞
$\lim_{x\to a} (fg)(x)$	ll'	∞	$-\infty$	$+\infty$	indéterminée

Propriété :

Soit f une fonction telle que $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont deux autres fonctions. Si g tend vers une limite non nulle et h tend vers 0 en un réel a, alors f tend vers l'infini, le signe restant à déterminer.

Exemples :

- La courbe de la fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- Étude des limites de $x \mapsto \frac{3x+2}{x-1}$ en 1 :
  $\lim_{\substack{x\to 1\\>}} 3x + 2 = 5$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\>}} x - 1 = 0^+$.
  $\lim_{\substack{x\to 1\\<}} 3x + 2 = 5$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\<}} x - 1 = 0^-$.
  donc $\lim_{\substack{x\to 1\\>}} \frac{3x+2}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x\to 1\\<}} \frac{3x+2}{x-1} = -\infty$
  D'où la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Propriétés :

$\lim_{x\to a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$ ou $-\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}*$	0	∞
$\lim_{x\to a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}*$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0	0	$l \in \mathbb{R}^*$
$\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$	$\frac{l}{l'}$	indéterminée	0	∞	indéterminée	∞

Exemple :

limite en $+\infty$ de f définie par $f(x) = \frac{4x^2+3}{x+2}$ pour $x \in]-2; +\infty]$.
On a $\lim_{x\mapsto+\infty} 4x^2 + 3 = +\infty$ et $\lim_{x\mapsto+\infty} x + 2 = +\infty$ d'où une indétermination à lever.
$f(x) = \frac{x^2(4+\frac{3}{x^2})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{x(4+\frac{3}{x^2})}{1+\frac{2}{x}}$.
Or $\lim_{x\mapsto+\infty} 4 + \frac{3}{x^2} = 4$ d'où $\lim_{x\mapsto+\infty} x(4 + \frac{3}{x^2}) = +\infty$.
Comme $\lim_{x\mapsto+\infty} 1 + \frac{2}{x} = 1$, on a donc $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x) = +\infty$.

5 Application à la définition de la continuité d'une fonction

5.1 Notion de continuité

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un nombre réel de I.
- La fonction f est dite *continue en a* si elle admet en a une limite égale à $f(a)$, c'est à dire si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- f est dite *continue sur I* si elle est continue en tout réel $a \in I$.

Exemple : la fonction partie entière notée E :
On appelle fonction partie entière la fonction sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x, $E(x)$ est l'unique entier n tel que $n \leq x < n+1$.
La fonction E est continue sur tout intervalle de la forme $]n; n+1[$ où n est un entier relatif.

5.2 Généralisation du théorème des valeurs intermédiaires à des intervalles quelconques

Propriété :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Le théorème des valeurs intermédiaires admet, entre autres, les généralisations suivantes :
- Si $I = [a; +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors pour tout réel $k \geq f(a)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; +\infty[$. Si, de plus, f est strictement croissante, alors il y a unicité de la solution.
- Si $I = [a; b[$ et $\lim_{x\to b} f(x) = l$ alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et l l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a; b[$. Si de plus f est strictement croissante, alors il y a unicité de la solution.
- Si $I = [-\infty; b[$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ et $\lim_{x\to b} f(x) = -\infty$ alors pour tout réel $k < l$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-\infty; b[$. Si de plus, f est strictement décroissante, alors il y a unicité de la solution.

x	a		c		$+\infty$
					$+\infty$
				$\nearrow$	
f			k		
		$\nearrow$			
	$f(a)$				

x	a		c		b
				l	$\Vert$
				$\nearrow$	$\Vert$
f			k		$\Vert$
		$\nearrow$			$\Vert$
	$f(a)$				$\Vert$

x	$-\infty$		c		b
	l				$\Vert$
		$\searrow$			$\Vert$
f			k		$\Vert$
				$\searrow$	$\Vert$
				$-\infty$	$\Vert$

Exemple :

Étude du nombre de solution de l'équation $x^5 = k$ où k est un réel fixé :

Soit f définie par $f(x) = x^5$ sur $]-\infty; +\infty[$.

- f est dérivable donc continue sur $]-\infty; +\infty[$;
- pour tout réel x, $f'(x) = 5x^4$ donc $f'(x) >= 0$ et $f'(x) > 0$ pour tout réel x non nul donc f est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$;
- $\lim_{x \to +\infty} x^5 = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x^5 = -\infty$.

Donc d'après une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $x^5 = k$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.