Fonction logarithme népérien, terminale, mathématiques complémentaires

F.Gaudon

13 mai 2023

Table des matières

1 Définition et propriétés algébriques

Définition :

On appelle fonction *logarithme népérien* et on note ln la fonction qui à tout réel x *strictement positif* associe l'unique réel y tel que $e^y = x$
On a donc pour tout $x > 0$ et tout y réel, $\ln(x) = y$ si et seulement si $e^y = x$.

Propriétés :

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$;
- pour tout réel x, $\ln(e^x) = x$;
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$

Preuve :
Conséquences directes de la définition.

Propriété (équation fonctionnelle) :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :
Pour tous les réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(a)+\ln(b)} =$ ....
$\ln(a) + \ln(b)$ est donc une solution de l'équation ....
Or par définition de ln, l'unique solution de cette équation est $\ln(ab)$.
D'où $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$;
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$;
- pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = n \ln a$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$;

Preuve :
- D'une part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(1) = 0$.
  D'autre part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$
  Donc $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) = 0$ et $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln(a)$.
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après ce qui précède.
- Admise.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

Exemples :
- $\ln(65536) = \ln(2^{16}) = 16\ln(2)$;
- $\ln(81) = \ln(3^4) = 4\ln(3)$;
- $\ln(81 \times 65536) = \ln(81) + \ln(65536) = 16\ln(2) + 4\ln(3)$;
- $\ln(1/10^8) = -8\ln(10) = -8\ln(2) - 8\ln(5)$;

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Dérivabilité et variations

Propriété :

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\inf[$ et

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$

Preuve :
Dérivabilité admise. Pour montrer la formule on part de $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
En dérivant on obtient(en tenant compte de la fonction composée de la forme e^u), $(\ln(x))'e^{\ln(x)} = 1$ donc $(\ln(x))'x = 1$ donc $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Exemple :
Soit f définie par $f(x) = 3\ln(x) + \frac{8}{x}$ pour tout réel x strictement positif.
On a $f'(x) = \dfrac{3}{x} - \dfrac{8}{x^2}$ pour tout réel x strictement positif.

Propriété :

La fonction ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve :
On utiliser le fait que la dérivée soit $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est positif.

2.2 Égalités et inégalités

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$;
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $a < b$.

Preuve :

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $e^{\ln(a)} = e^{\ln(b)}$ si et seulement si $a = b$.
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si $e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)}$ si et seulement si $a < b$.

Exemples de résolution d'équations et d'inéquations :

- $e^x = 2$ équivaut à $x = \ln(2)$;

- Résolution de $\ln(3x+4)=5$:
  On cherche d'abord l'ensemble de définition : $3x+4>0$ équivaut à $x>\frac{-4}{3}$ donc l'ensemble de définition est $]\frac{-4}{3};+\infty[$.
  On résout ensuite l'équation dans $]\frac{-4}{3};+\infty[$:
  $\ln(3x+4)=5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)}=e^5$ c'est à dire $3x+4=e^5$ donc $x=\frac{e^5-4}{3}$.
  On vérifie que la solution obtenue est bien dans l'ensemble de définition : $\frac{e^5-4}{3}\in\,]\frac{-4}{3};+\infty[$.
  L'unique solution est donc $\frac{e^5-4}{3}$.
- Résolution de $3\ln(x)+5=7$.
  L'ensemble de définition est $]0;+\infty[$.
  On isole ln : $3\ln(x)=2$
  et $\ln(x)=\frac{2}{3}$
  On applique l'exponentielle : $e^{\ln(x)}=e^{\frac{2}{3}}$
  D'où $x=e^{\frac{2}{3}}$
  Il y a donc une unique solution $e^{\frac{2}{3}}$.
- Résolution de $\ln(3x+4)<5$:
  On cherche d'abord l'ensemble de définition : on a vu précédemment qu'il s'agit de $]\frac{-4}{3};+\infty[$.
  On résout ensuite l'inéquation dans cet ensemble de définition :
  $\ln(3x+4)<5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)}<e^5$ donc à $3x+4<e^5$ et à $x<\frac{e^5-4}{3}$.
  L'ensemble des solutions est l'intersection de l'ensemble déterminé par l'inéquation et par l'ensemble de définition : $]\frac{-4}{3};+\infty[\cap]-\infty;\frac{e^5-4}{3}[=]\frac{-4}{3};\frac{e^5-4}{3}[$.
- Résolution de $3e^x>5$:
  L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
  On isole l'exponentielle : $e^x>\frac{5}{3}$
  On résout en appliquant ln : $\ln(e^x)>\ln(\frac{5}{3})$
  D'où $x>\ln(\frac{5}{3})$
  L'ensemble des solutions est donc $]\ln(\frac{5}{3});+\infty[$.
- Résolution de $0,8^n<0,2$:
  $0,8^n<0,2$ équivaut à $\ln(0,8^n)<\ln(0,2)$ donc à $n\ln(0,8)<\ln(0,2)$
  c'est à dire à $n>\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,8)}$ car on multiplie par $\ln(0,8)$ qui est négatif.
  D'où $n\geq 8$.

2.3 Limites

Propriété :

On a $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x)=+\infty$ et $\lim_{x\mapsto 0^+}\ln(x)=-\infty$.
La droite d'équation $x=0$ est donc une asymptote verticale à la courbe en 0.

Preuve :
Soit M un réel. Pour tous les réels x tels que $x>e^M$ (il en existe car $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$),la fonction ln est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ donc $\ln(x)>\ln(e^M)$ d'où $\ln(x)>M$. La fonction ln a donc bien pour limite $+\infty$ en $+\infty$.
Pour $x>0$, on pose $X=\frac{1}{x}$. Alors $\ln(x)=\ln(\frac{1}{X})=-\ln(X)$. Or $\lim_{x\to 0,x>0}X=+\infty$. Or $\lim_{X\to+\infty}(-\ln(X))=-\infty$ donc $\lim_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$.

2.4 Tableau de variation

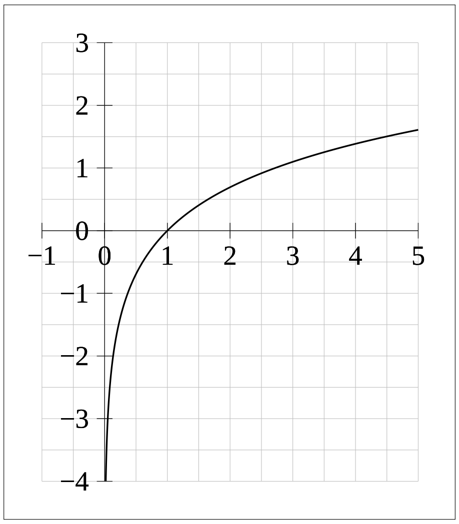
x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$	$+$	
$\ln(x)$	$\|$ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2.5 Tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|$	-	0	$+$	

2.6 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



2.7 Dérivation de fonctions composées avec ln

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(4x^2 + 5)$.

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \dfrac{8x}{4x^2 + 5}$.

2.8 Étude de la convexité

Propriété :

La fonction ln est *concave* sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

La dérivée seconde de ln est donnée par $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ qui est négative sur $]0; +\infty[$.