Fonction logarithme népérien, cours, terminale, mathématiques complémentaires

1 Définition et propriétés algébriques

Définition :

On appelle fonction *logarithme népérien* et on note ln la fonction qui à tout réel x *strictement positif* associe l'unique réel y tel que ....
On a donc pour tout $x > 0$ et tout y réel, $\ln(x) = y$ si et seulement si ....

Propriétés :

- Pour tout réel $x > 0$, $e^{\ln(x)} = ...$;
- pour tout réel x, $\ln(e^x) = ...$;
- $\ln(1) = ...$ et $\ln(e) = ...$

Preuve :
Conséquences directes de la définition.

Propriété (équation fonctionnelle) :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) =$................. .

Preuve :
Pour tous les réels a et b strictement positifs, $e^{\ln(a)+\ln(b)} = ...$
$\ln(a) + \ln(b)$ est donc une solution de l'équation ....
Or par définition de ln, l'unique solution de cette équation est $\ln(ab)$.
D'où $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\ln(\frac{1}{a}) = ...$;
- $\ln(\frac{a}{b}) = ...$;
- pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = ...$;
- $\ln(\sqrt{a}) = ...$;

Preuve :

- D'une part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) =$ ....
  D'autre part, $\ln(a \times \frac{1}{a}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{a})$
  Donc $\ln(a) + \ln(\frac{1}{a}) =$ ....
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) =$................. .... d'après ce qui précède.
- Admise.

Exemples :

- $\ln(65536) = ...$
- $\ln(81) = ...$
- $\ln(81 \times 65536) = ...$
- $\ln(1/10^8) = ...$

2 Étude de la fonction logarithme népérien

2.1 Dérivabilité

Propriété :

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\inf[$ et

$$\ln'(x) = ...$$

Preuve :

Dérivabilité admise. Pour montrer la formule on part de $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.
En dérivant on obtient(en tenant compte de la fonction composée de la forme e^u), $(\ln(x))'e^{\ln(x)} = 1$ donc $(\ln(x))'x = 1$ donc $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$.

Exemple :

Soit f définie par $f(x) = 3\ln(x) + \frac{8}{x}$ pour tout réel x strictement positif.
On a pour tout réel x strictement positif $f'(x) = ...$

Propriété :

La fonction ln est strictement .... sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

La dérivée est $x \mapsto$ .... qui est ....

2.2 Dérivation de fonctions composées avec ln

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = ...$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(4x^2 + 5)$.
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ...$

2.3 Étude de la convexité

Propriété :

La fonction ln est .... sur $]0; +\infty[$.

Preuve :
La dérivée seconde de ln est donnée par .... qui est de signe .... sur $]0; +\infty[$.

2.4 Égalités et inégalités

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si .... ;
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si ....

Preuve :
- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si .... c'est à dire ....
- $\ln(a) < \ln(b)$ si et seulement si .... c'est à dire ....

Exemples d'application à la résolution d'équations et d'inéquations :

- $e^x = 2$ équivaut à ....
- Résolution de $\ln(3x+4) = 5$

  On recherche d'abord l'ensemble de définition : $3x+4 > 0$ si et seulement si ....

  L'ensemble de définition est donc ...

  On résout ensuite l'équation dans cet ensemble de définition :

  $\ln(3x+4) = 5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)} = e^5$ c'est à dire à ....

  ...

  On vérifie que la solution est bien dans l'ensemble de définition : ...

  Il y a donc une unique solution est donc ....

- Résolution de $3\ln(x) + 5 = 7$.

  L'ensemble de définition est $]0; +\infty[$.

  On isole ln : ....

  et .....

  On applique l'exponentielle : ....

  D'où ...

  Il y a donc une unique solution ...
- Résolution de $\ln(3x+4) < 5$:

  On recherche d'abord l'ensemble de définition :

  L'ensemble de définition est ...

  On résout ensuite l'inéquation dans cet ensemble de définition : $\ln(3x+4) < 5$ équivaut à $e^{\ln(3x+4)} < e^5$ c'est à dire à ....

  ...

  L'ensemble des solutions est l'intersection de l'ensemble de définition et de l'ensemble déterminé par la résolution de l'inéquation :

  ...
- Résolution de $3e^x > 5$:

  L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

  On isole l'exponentielle : ....

  On résout en appliquant ln : ....

  D'où ...

  L'ensemble des solutions est donc ...
- Résolution de $0,8^n < 0,2$:

  $0,8^n < 0,2$ équivaut à .... donc à ....

  c'est à dire à ....

  D'où .....

2.5 Limites

Propriété, limites :

On a $\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x)=$........... et $\lim_{x\mapsto 0^+}\ln(x)=$.......... . La droite d'équation .... est donc une asymptote .... à la courbe en 0.

Preuve :
Soit M un réel. Pour tous les réels x tels que $x>e^M$ (il en existe car $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$),la fonction ln est strictement .... sur $]0;+\infty[$ donc $\ln(x)>\ln(e^M)$ d'où $\ln(x)>$ ....
La fonction ln a donc bien pour limite .... en $+\infty$.
Pour $x>0$, on pose $X=\frac{1}{x}$. Alors $\ln(x)=\ln(\frac{1}{X})=-\ln(X)$. Or $\lim_{x\to 0,x>0}X=$............. .
Or $\lim_{X\to+\infty}(-\ln(X))=$........ donc $\lim_{x\to 0}\ln(x)=$.......... .

2.6 Tableau de variation

x	0 $\quad\quad$ $+\infty$
$\ln'(x)$	... ...
$\ln(x)$	... ...

2.7 Tableau de signe

x	0 .... $+\infty$
$\ln(x)$	....

2.8 Représentation graphique

On parle de ....
pour décrire une telle évolution.