Primitives et équations différentielles, cours, classe de terminale, Mathématiques complémentaires

1 Équations différentielle et primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition :
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et qui fait intervenir sa fonction dérivée et/ou sa fonction dérivée seconde.

Exemple :
L'équation d'inconnue y, $y'(t) = 4t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une équation différentielle.
La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = 2t^2$ pour tout t
$in\mathbb{R}$ en est une solution.

Définition :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une fonction F dérivable sur un intervalle I et de dérivée $F' = f$ est appelée *primitive* de f sur I. C'est une solution à l'équation différentielle d'inconnue y, $y' = f$.

Exemple :
$F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto x$ car $F'(x) = x$ pour tout réel x.

2 Propriétés des primitives

Propriété :
Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout réel x, $G(x) = F(x) + k$.

preuve :
Si F et G sont deux primitives de f sur I alors $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0$ donc $F - G$ est une constante k.

Exemple :
$F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$ et $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2,5$ sont deux primitives de $x \mapsto x$.

Propriété :
Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive G telle que $G(a) = b$.

preuve :
On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + k$. D'où $G(a) = b$ si et seulement si $F(a) + k = b$ c'est à dire $k = b - F(a)$.

Exemple :
Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto \frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

Propriété :
Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve :
Admis

3 Calcul de primitives

3.1 Opérations sur les primitives

Propriété :
Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit F_1 une primitive de f_1 et F_2 une primitive de f_2. Soit k un réel.

- kF_1 est une primitive de kf.
- $F_1 + F_2$ est une primitive de $f_1 + f_2$.

Preuve :
$(kF_1)' = kF_1' = kf_1$ et $(F_1 + F_2)' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$ d'après les opérations sur les fonctions dérivées.

3.2 Primitives de fonctions de référence

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	C	$\mathbb{R}$
1	$x + C$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + C$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3} + C$	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x} + C$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + C$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
e^x	$e^x + C$	$\mathbb{R}$

où C désigne un nombre réel.

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 3e^x - 6$.
Alors les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions F définies par
$F(x) = 5\frac{x^3}{3} + 3e^x - 6x + C$ où C est une constante.

3.3 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	Primitives F de f sur I	intervalle I
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(u) + C$	I tel que $u > 0$ sur I
$u'e^u$	$e^u + C$	$\mathbb{R}$

où C désigne un nombre réel.

Exemples :

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)(x^2 + x)$.
  On a $f(x) = u'(x)u(x)$ avec $u(x) = x^2 + x$ et $u'(x) = 2x + 1$.
  Donc les primitives de f sont définies par $F(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)^2 + C$ où C est une constante réelle.

- Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (6x+3)e^{x^2+x}$.
  On a $g(x) = 3u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x) = x^2 + x$, $u'(x) = 2x+1$.
  Donc les primitives de g sont définies par $G(x) = 3e^{u(x)} + C = 3e^{x^2+x} + C$ où C est une constante réelle.

4 Résolution de l'équation différentielle y'=ay

Théorème :
a désigne un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par $f_k(x) = ke^{ax}$ où k est un réel quelconque.

Preuve :
La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $f_k'(x) = ake^{ax} = af_k(x)$ pour tout réel x. Donc f_k est une solution particulière de l'équation.
Démontrons ensuite que les fonctions f_k sont les seules solutions.
On considère pour cela une fonction g solution de l'équation $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction h définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = g'(x)e^{-ax} - ag(x)e^{-ax} = (g'(x) - ag(x))e^{-ax}$.
Comme g vérifie $g' = ag$ on a donc $h' = 0$ donc h est une fonction constante.
Il existe donc un réel k tel que pour tout réel x, $h(x) = k$, c'est à dire $g(x)e^{-ax} = k$ donc $g(x) = ke^{ax}$.

Exemple :
L'équation $y' = 3y$ a pour solutions les fonctions f définies par $f(x) = ke^{3x}$ où k est une constante réelle.

5 Équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème :
a et b sont des réels non nuls. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay+b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel fixé.

Preuve :

- Montrons que la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ avec k réel, est une solution.
  Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f_k'(x) = kae^{ax}$ donc $af_k(x) + b = a(ke^{ax} - \frac{b}{a}) + b = ake^{ax} - b + b = ake^{ax} = f_k'(x)$ c'est à dire que f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

- Montrons que toute solution s'écrit de cette forme.
  Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$. On note g la fonction définie par $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$. g est dérivable et $g'(x) = f'(x)$. Or $f'(x) = af(x) + b$ donc $g'(x) = f'(x) = a(f(x) + \frac{b}{a}) = ag(x)$ d'où g est une solution de l'équation $y' = ay$ et il existe donc un réel k tel que pour tout réel $g(x) = ke^{ax}$ d'où $f(x) = g(x) - \frac{b}{a} = ke^{ax} - \frac{b}{a}$ ce qui montre que f est de la forme voulue.

Exemple :
L'équation $y' = 3y - 4$ a pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ke^{3x} + \frac{4}{3}$ où k est une constante réelle.

> **Propriété :**
> Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

Preuve :
On a vu que les solutions de $y' = ay + b$ sont de la forme $f : x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$ où k est un réel. On a alors $f(x_0) = y_0$ si et seulement si $ke^{ax_0} - \frac{b}{a} = y_0$ ce qui équivaut à $k = e^{-ax_0}(y_0 + \frac{b}{a})$ ce qui fixe le réel k de manière unique.

Exemple :
On recherche la solution de l'équation $y' = 3y - 4$ qui vérifie $y(0) = 1$.
On a vu précédemment que l'équation $y' = 3y - 4$ a pour solutions les fonctions définies par $y(x) = ke^{3x} + \frac{4}{3}$ où k est une constante réelle. y vérifie $y(0) = 1$ si et seulement si $ke^{3\times 0} + \frac{4}{3} = 1$ c'est à dire $k + \frac{4}{3} = 1$ donc $k = 1 - \frac{4}{3}$ ou encore $k = \frac{-1}{3}$.
L'unique solution est donc la fonction f définie par $f(x) = \frac{-1}{3}e^{3x} + \frac{4}{3}$.