Primitives et équations différentielles, cours, classe de terminale, Mathématiques complémentaires

1 Équations différentielle et primitives d'une fonction continue sur un intervalle

Définition :
Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et qui fait intervenir sa fonction dérivée et/ou sa fonction dérivée seconde.

Exemple :
L'équation d'inconnue y, $y'(t) = 4t$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ est une équation différentielle.
La fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = 2t^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ en est une solution.

Définition :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Une fonction F dérivable sur un intervalle I et telle que .... est appelée *primitive* de f sur I. C'est une solution à l'équation différentielle d'inconnue y, ...

Exemple :
$F : x \mapsto$..... est une primitive de $f : x \mapsto x$ car .... pour tout réel x.

2 Propriétés des primitives

Propriété :
Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet .... primitives : G est une primitive de f si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout réel x, ...

preuve :
Si F et G sont deux primitives de f sur I alors .... donc $F - G$ est ....

Exemple :

$F_1 : x \mapsto$......................... et $F_2 : x \mapsto$................................ sont deux primitives de $x \mapsto x$.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe .... telle que $G(a) = b$.

preuve :

On a vu qu'il existe une constante k telle que pour tout $x \in I$, ...
D'où $G(a) = b$ si et seulement si .... c'est à dire ....

Exemple [Savoir déterminer une primitive vérifiant des contraintes] :

Recherchons une primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$.
On a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto$............................. où k est un réel.
$F(1) = 2$ impose donc ....
D'où ....

Propriété :

Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

Preuve :

Admis

3 Calcul de primitives

3.1 Opérations sur les primitives

Propriété :

Soient f_1 et f_2 deux fonctions continues sur un intervalle I. Soit F_1 une primitive de f_1 et F_2 une primitive de f_2. Soit k un réel.

- kF_1 est une primitive de ....
- $F_1 + F_2$ est une primitive de ....

Preuve :
$(kF_1)'$.............. et $(F_1+F_2)' =$............... d'après les opérations sur les fonctions dérivées.

3.2 Primitives de fonctions de référence

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	primitives F de f sur I	intervalle I
0	....	$\mathbb{R}$
1	....	$\mathbb{R}$
x	....	$\mathbb{R}$
x^2	....	$\mathbb{R}$
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	....	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	....	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	....	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$, $n \in \mathbb{N}$	....	$]-\infty;0[$ ou $]0;+\infty[$
e^x	....	$\mathbb{R}$

où C désigne un nombre réel.

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 + 3e^x - 6$.
Alors les primitives de f sur $\mathbb{R}$ sont définies par ....

3.3 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie sur I par	Primitives F de f sur I	intervalle I
$u'u$	....	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{u}$	....	I tel que $u>0$ sur I
$u'e^u$	....	$\mathbb{R}$

où C désigne un nombre réel.

Exemples :

- Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)(x^2+x)$.
  On a $f(x) =$.................. avec $u(x) =$........... et $u'(x) =$............ .
  Donc les primitives de f sont définies par ....
- Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (6x+3)e^{x^2+x}$.
  On a $g(x) =$...................... avec $u(x) =$............., $u'(x) =$............ .
  Donc les primitives de g sont définies par ....

4 Résolution de l'équation différentielle y'=ay

Théorème :
a désigne un nombre réel non nul. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay$ sont les fonctions définies par .... où k est un réel quelconque.

Preuve :
La fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) =$................. est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a pour tout réel x $f_k'(x) =$.. .
Donc f_k est une solution particulière de l'équation.
Démontrons ensuite que les fonctions f_k sont les seules solutions.
On considère pour cela une fonction g solution de l'équation $y' = ay$ sur $\mathbb{R}$ et la fonction h définie par $h(x) = g(x)e^{-ax}$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $h'(x) =$.....
.... Comme g vérifie $g' = ag$ on a donc $h' =$...... donc h est ....
....
Il existe donc un réel k tel que pour tout réel x, $h(x) =$..........., c'est à dire $g(x)e^{-ax} =$...... donc $g(x) =$.............

Exemple :
L'équation $y' = 3y$ a pour solutions les fonctions f définies par ....

5 Équation différentielle $y' = ay + b$

Théorème :
a et b sont des réels non nuls. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = ay+b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par .... où k est un réel fixé.

Preuve :

- Montrons que la fonction f_k définie sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) =$.................................. avec k réel, est une solution.
  Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
  $f_k'(x) =$.....
  donc $af_k(x) + b =$...
  c'est à dire que f_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$.
- Montrons que toute solution s'écrit de cette forme.
  Soit f une solution sur $\mathbb{R}$ de $y' = ay + b$.
  On note g la fonction définie par $g(x) = f(x) + \frac{b}{a}$.
  g est dérivable et $g'(x) =$..........
  Or $f'(x) = af(x) + b$ donc $g'(x) =$...........
  d'où g est une solution de l'équation $y' = ay$ et il existe donc un réel k tel que pour tout réel $g(x) =$.....................
  d'où $f(x) =$... ce qui montre que f est de la forme voulue.

Exemple :
L'équation $y' = 3y - 4$ a pour solutions les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par
....

Propriété :
Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, l'équation différentielle $y' = ay + b$ (avec $a \neq 0$) admet une unique solution f telle que $f(x_0) = y_0$.

Preuve :
On a vu que les solutions de $y' = ay+b$ sont de la forme .... où k est un réel.
On a alors $f(x_0) = y_0$ si et seulement si .... ce qui équivaut à .... ce qui fixe le réel k de manière unique.

Exemple :

On recherche la solution de l'équation $y' = 3y - 4$ qui vérifie $y(0) = 1$.
On a vu précédemment que l'équation $y' = 3y - 4$ a pour solutions les fonctions définies par .... où k est une constante réelle. y vérifie $y(0) = 1$ si et seulement si .... c'est à dire .... L'unique solution est donc la fonction f définie par ....