

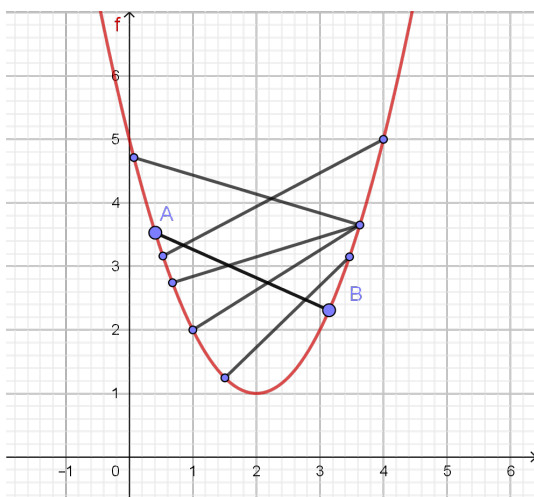
Fonctions convexes, cours, classe de terminale, Mathématiques complémentaires

1 Convexité

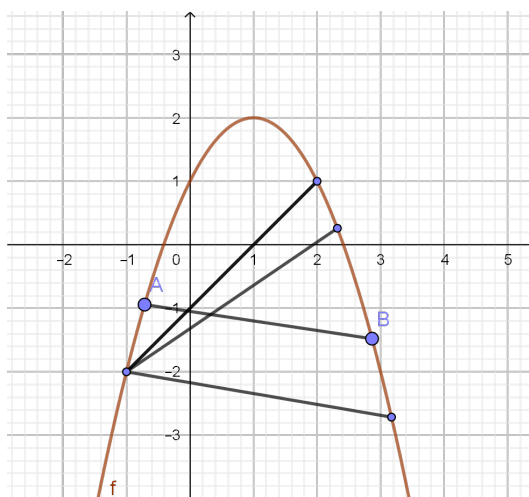
Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit \mathcal{C} sa représentation graphique dans un repère.

- f est dite *convexe* sur I si sa courbe représentative est en-dessous de toutes ses sécantes sur I .
- f est dite *concave* sur I si sa courbe est au-dessus de toutes ses sécantes sur I



Sécantes et convexité

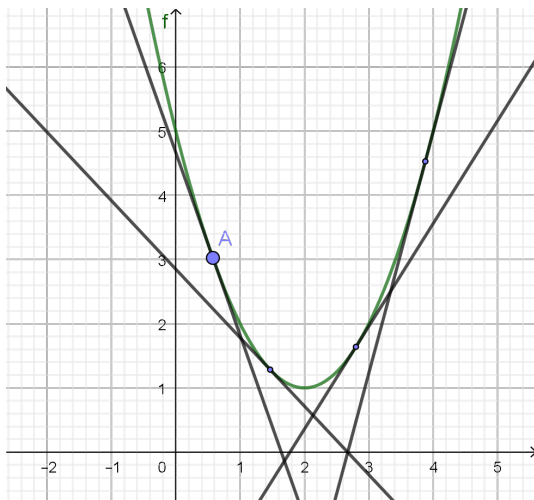


Sécantes et concavité

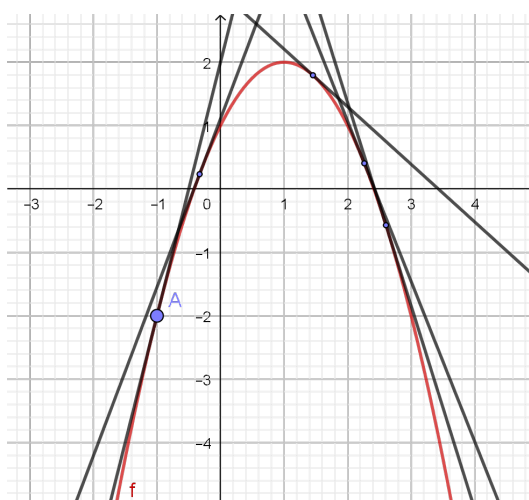
2 Convexité et dérivabilité

Propriété :

- f est convexe sur I
si et seulement si sa courbe représentative dans un repère et entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes
si et seulement si sa fonction dérivée f' est croissante sur I .
- f est concave sur I
si et seulement si sa courbe représentative dans un repère du plan est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes
si et seulement si sa fonction dérivée f' est décroissante sur I .



Tangentes et convexité



Tangentes et concavité

Preuves :

Admises

Propriété :

f est convexe sur I si et seulement $-f$ est concave sur I .

3 Dérivée seconde**Définition :**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et dont la fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I . On appelle *dérivée seconde* de f et on note f'' la fonction dérivée de f' sur I c'est à dire la fonction définie par $f'' = (f')'$.

Exemple [Calcul de la dérivée seconde d'une fonction] :

Soit f définie par $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 9$.

f est dérivable sur $] -\infty; +\infty[$ et $f'(x) = 15x^2 + 6x - 2$.

f' est dérivable sur $] -\infty; +\infty[$ et $f''(x) = 30x + 6$.

Propriété :

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I .

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I ;
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I .

Preuve :

Soit $x_0 \in I$. On considère la tangente à la courbe représentative de f en x_0 . Elle a pour équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Il s'agit de montrer que la courbe est au dessus de cette tangente pour tout réel $x \in I$.

On considère donc la fonction différence d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

$$d''(x) = f''(x)$$

Comme f'' est positive, f' est croissante sur I .

On a donc, compte tenu du fait que $d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) - f(x_0) = 0$:

x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	+		+
variations $d'(x)$			↗
		0	
	↗		
signe $d'(x)$	-	0	+
variations d	↘		↗
		0	

D'où pour tout $x \in I$, $d(x) \geq 0$ ce qui signifie que la courbe représentative de f est toujours au dessus de sa tangente en x_0 .

On démontre de même le deuxième point.

Définition :

Un *point d'inflexion* est un point où la représentation graphique d'une fonction traverse sa tangente.

Exemple :

Le point de coordonnées $(0; 0)$ est un point d'inflexion pour la représentation graphique de la fonction cube.

Propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I . Si f'' s'annule en changeant de signe pour $x = x_0$, alors la représentation graphique de f admet un point d'inflexion de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.

Preuve :

On considère à nouveau la fonction d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0))$.

d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

$d''(x) = f''(x)$

f'' change de signe en x_0 .

On peut supposer que f est négative avant x_0 et positive après, la démonstration étant identique dans l'autre cas.

x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	-	0	+
variations $d'(x)$	↘	0	↗
signe $d'(x)$	+	0	+
variations d		↗	
signe $d(x)$	-	0	+

Ce qui montre la courbe est en dessous de sa tangente avant x_0 et au dessus après.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$.

On a $f'(x) = x^2 - 2x$ et $f''(x) = 2x - 2$.

$f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq 1$. La courbe représentative de f dans un repère du plan admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

