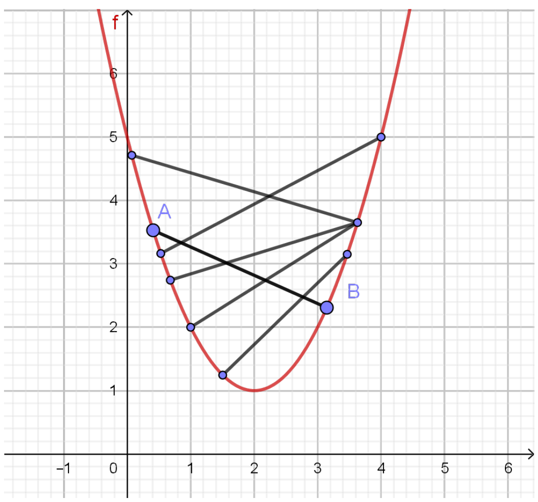
Fonctions convexes, cours, classe de terminale, Mathématiques complémentaires

1 Convexité

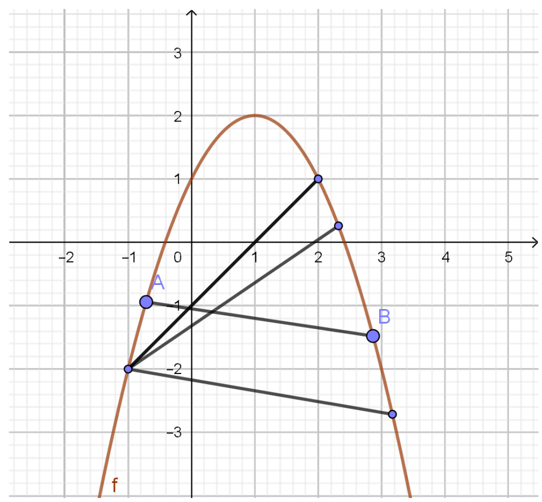
Définition :

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère.

- f est dite *convexe* sur I si sa courbe représentative est .... toutes ses sécantes sur I.
- f est dite *concave* sur I si sa courbe représentative est .... de toutes ses sécantes sur I.



Sécantes et ....

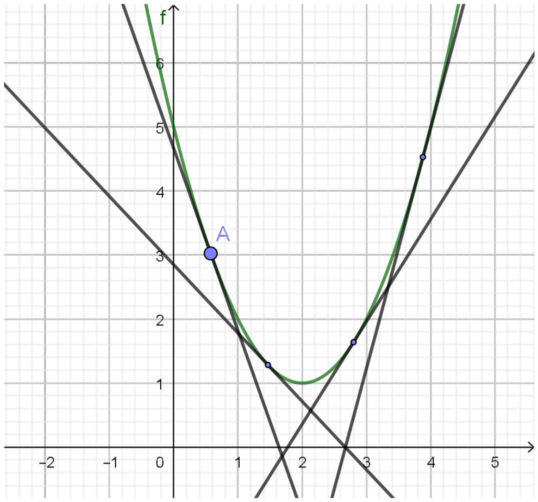


Sécantes et ....

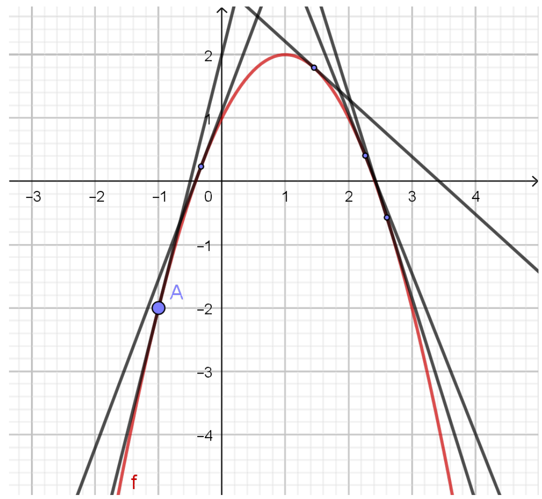
2 Convexité et dérivabilité

Propriété :

- f est convexe sur I
  si et seulement si sa courbe représentative dans un repère et entièrement située .... de chacune de ses tangentes
  si et seulement si sa fonction dérivée f' est .... sur I.
- f est concave sur I
  si et seulement si sa courbe représentative dans un repère du plan est entièrement située .... de chacune de ses tangentes
  si et seulement si sa fonction dérivée f' est .... sur I.



Tangentes et ....



Tangentes et ....

Preuves :

Admises

> **Propriété :**
>
> f est convexe sur I si et seulement .... est concave sur I.

3 Dérivée seconde

> **Définition :**
>
> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et dont la fonction dérivée f' est aussi dérivable sur I. On appelle *dérivée seconde* de f et on note f'' la fonction dérivée de f' sur I c'est à dire la fonction définie par $f'' = (f')'$.

Exemple [Calcul de la dérivée seconde d'une fonction] :

Soit f définie par $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x + 9$.

f est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ et $f'(x) =$........

f' est dérivable sur $]-\infty;+\infty[$ et $f''(x) =$..........

> **Propriété :**
>
> Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur I.
>
> - f est convexe sur I si et seulement si f'' est .... sur I ;
> - f est concave sur I si et seulement si f'' est .... sur I.

Preuve :

Soit $x_0 \in I$. On considère la tangente à la courbe représentative de f en x_0. Elle a pour équation ....

Il s'agit de montrer que la courbe est au dessus de cette tangente pour tout réel $x \in I$.

On considère donc la fonction différence d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) =$...........

$d''(x) =$..........

Comme f'' est .... sur I, f' est .... sur I.

On a donc, compte tenu du fait que $d(x_0) = f(x_0) - f'(x_0)(x_0 - x_0) - f(x0) =$...... :

x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	.....		.....
variations $d'(x)$	....		....
signe $d'(x)$	......	......	......
variations d	....	....	....

D'où pour tout $x \in I$, $d(x) \geq$ ... ce qui signifie que la courbe représentative de f est toujours .... de sa tangente en x_0.

On démontre de même le deuxième point.

Définition :

Un *point d'inflexion* est un point où la représentation graphique d'une fonction ....

Exemple :

Le point de coordonnées .... est un point d'inflexion pour la représentation graphique de la fonction cube.

Propriété :

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et x_0 un réel de I. Si f'' s'annule en changeant de signe pour $x = x_0$, alors la représentation graphique de f admet un point d'inflexion de coordonnées ....

Preuve :

On considère à nouveau la fonction d définie sur I par $d(x) = f(x) - (f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

d est deux fois dérivable sur I et : $d'(x) = f'(x) - f'(x_0)$

$d''(x) = f''(x)$

f'' change de signe en x_0.

On peut supposer que f est négative avant x_0 et positive après, la démonstration étant identique dans l'autre cas.

x	a	x_0	b
signe $d''(x)$	-	0	+
variations $d'(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$
signe $d'(x)$	+	0	+
variations d	$\nearrow$	0	$\nearrow$
signe $d(x)$	-	0	+

Ce qui montre la courbe est en dessous de sa tangente avant x_0 et au dessus après.

Exemple :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$.

On a $f'(x) =$...........

et $f''(x) =$......

$f''(x) \geq 0$ si et seulement si $x \geq$ ..... .

La courbe représentative de f dans un repère du plan admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse 1.