Suites, cours, terminale STMG

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier *terme* u_p où p est un entier naturel, et pour tout entier naturel $n \geq p$ par la relation :

....

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 56$ et $u_{n+1} = u_n - 4$. (u_n) est une suite arithmétique de raison ....

On a $u_1 =$ ....,

$u_2 =$ ....,

$u_3 =$ ....

1.2 Expression en fonction de n

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n,

  ....

- si le premier est u_1, alors pour tout entier n,

  ....

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

....

Exemple [Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite arithmétique] :

Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$.

$u_n =$ ......

On a par exemple, $u_{12} =$ ....

ou encore $u_{15} =$ ....

1.3 Reconnaissance

Propriété :

> Soit (u_n) une suite de premier terme u_p.
> (u_n) est arithmétique
> si et seulement si il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel $n \geq p$ $u_{n+1} =$ ....

Propriété :

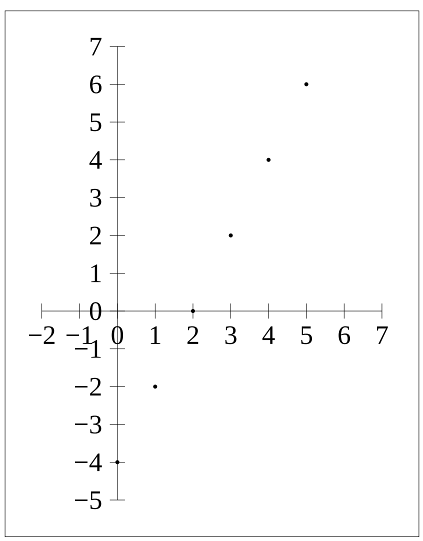
> Soit (u_n) une suite arithmétique et p et n deux entiers naturels distincts.
> Alors la raison r de la suite est donnée par :
>
> ....

Exemple [Déterminer la raison d'une suite arithmétique] :
Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison de la suite.
On a $r =$ ....

Propriété :

> On considère une suite (u_n). (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si les points constituant sa représentation graphique dans un repère du plan sont .... On parle alors de ....

Exemple :
La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 + 2n$ pour tout entier naturel n.



1.4 Variations

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Si $r > 0$, alors (u_n) est strictement croissante ;
- Si $r < 0$, alors (u_n) est strictement décroissante.

1.5 Sommes de termes

Propriété :

Pour toute suite arithmétique (u_n) et tout entier naturel n :

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = ...$$

ou pour tout entier naturel $p < n$,

$$.....$$

ce qui s'écrit encore :

$$.....$$

Exemple [Savoir calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique] :

On considère la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
L'expression en fonction de n de u_n est $u_n =$.....

$u_{10} =$ ....

On a donc $\sum_{k=0}^{k=10} u_k =$....

2 Suites géométriques

2.1 Définition

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par .... où p est un entier naturel, et telle que pour tout entier naturel $n \geq p$:

$$................$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1. (u_n) est une suite géométrique de raison 2. On a

$u_2 =$ ...

$u_3 =$ .....

$u_4 =$ ....

2.2 Expression en fonction de n

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme :
- u_0, alors ....
- u_1, alors .....

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

....

Exemple [Exprimer en fonction de n le terme général d'une suite géométrique] :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$u_n = ...$
On a par exemple $u_{12} = ...$

Propriété :

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0 et ne s'annulant pas.
La suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si pour tous les entiers naturels n, ... est une constante. On parle alors de croissance ....

Exemple [Reconnaître si trois nombres sont les termes consécutifs d'une suite géométrique] :
On considère les nombres 6, 18 et 54.
On a .... et .... donc les trois nombres sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison ....

2.3 Sommes de termes

Propriété :

Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors :
- si $q \neq 1$,
$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = ...$$
ou
....
- si $q = 1$, $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = ...$

Exemple [Savoir calculer les premiers termes d'une suite géométrique] :
On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $1,02$.
On a $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = ...$

2.4 Variations

Propriété :

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$.

- Si ...., alors (u_n) est strictement .... ;
- Si ...., alors (u_n) est strictement ....

3 Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

Définition :

Soit a et b deux réels.

- La *moyenne arithmétique* des deux nombres a et b est le nombre défini par ....
- La *moyenne géométrique* de deux nombres a et b positifs est le nombre défini par ....

Propriété :

- Trois nombres a, b et c avec $a \leq b \leq c$ suivent une progression arithmétique si et seulement si b est la moyenne .... de a et c.
- Trois nombres a, b et c avec $a \leq b \leq c$ suivent une progression géométrique si et seulement si b est la moyenne .... de a et c.

Exemples [reconnaître si trois nombres suivent une progression arithmétique ou géométrique] :

- On considère les nombres 34, 45 et 56. On a .... donc les trois nombres suivent une progression .... de raison ....
- On considère les nombres 6, x et 54. On suppose que les trois nombres suivent une progression géométrique.
  On a $x =$ .... et les trois nombres suivent une progression .... de raison ....

4 Application aux taux d'évolution

Propriété :

Un capital C_0 est placé pendant n années au taux annuel de t % avec intérêts composés. Alors, au bout de n années, le capital disponible C_n est :

....

Définition :

- C_n est appelé .... par le capital C_0 au pendant n années au taux de t %.
- C_0 est appelé .... de C_n.
  On a ....
- Deux taux correspondants à des périodes de placement différentes sont dits .... lorsque, à intérêts composés, ils donnent la même valeur acquise du capital au bout du même temps de placement.

Exemple :

C_0 est placé à 0,26 % par mois avec intérêts composés sur 12 mois. On a :
C_{12} = ... Donc le taux annuel équivalent au taux mensuel de 0,26 % est ....

Définition et propriété :

On considère un capital de valeur actuelle C_0 qui subit deux évolutions successives de taux t_1 et t_2. On note C_1 et C_2 les valeurs acquises après la première et la deuxième augmentation.
Alors :

- la valeur du capital après la première évolution est C_1 = ... ;
- le *coefficient multiplicateur moyen* correspondant est égal à la *moyenne géométrique* des coefficients multiplicateurs appliqués, c'est à dire :

  ...

  et le *taux moyen* appliqué est :

  ...

Exemples :

- Un capital C_0 de 5000 euros placé à intérêts composés a une valeur acquise C_2 égale à 5600 euros après 2 ans.
  Alors la valeur C_1 acquise au bout d'un an est C_1 = ...

- Le prix d'un produit augmente de 5% puis de 9%.
  Alors le coefficient multiplicateur moyen est ....
  et le taux moyen est .... soit .... d'augmentation.

5 Algorithmique

Exemples d'algorithme de calcul de sommes :

- On considère la suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ pour tout entier naturel n.

```
def sommesTermes(n):
        S=.....
        for k in range(0,n+1):
                S=.....
        return .....
```

  La variable k est appelée ....
  La variable S est appelée ....

- On considère la suite (u_n) définie par $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel n non nul.

```
def sommesTermes(n):
        u=....
        S=....
        for k in range(2,n+1):
                u=.....
                S=.....
        return ...
```