# Suites de nombres, cours, terminale STMG

F.Gaudon

26 octobre 2021

## Table des matières

# 1 Suites arithmétiques

## 1.1 Définition

**Définition :**

Soit $r$ un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* $r$ toute suite définie par son premier *terme* et pour tout entier naturel $n$ par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

**Exemple :**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = 56$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.
$(u_n)$ est une suite arithmétique de raison -4.
On a $u_1 = u_0 - 4 = 56 - 4 = 52$, $u_2 = 52 - 4 = 48$, $u_3 = 48 - 4 = 44$.

## 1.2 Expression en fonction de $n$

**Propriété (expression en fonction de $n$) :**

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison $r$, alors :

- si le premier terme est $u_0$, alors pour tout entier $n$,

$$u_n = u_0 + nr$$

- si le premier terme est $u_1$, alors pour tout entier $n$,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels $n$ et $p$ avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

**Exemple [Exprimer en fonction de $n$ le terme général d'une suite arithmétique] :**
Soit $(u_n)$ la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$.
$u_n = 56 - 4n$
On a par exemple, $u_{12} = u_0 + 12r = 56 + 12 \times (-4) = 8$ ou encore $u_{15} = u_12 + 3r = 8 + 3 \times (-4) = 8 - 12 = -4$.

## 1.3 Reconnaissance

**Propriété :**

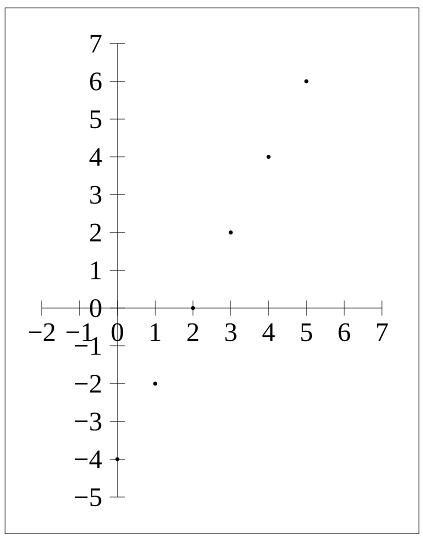
> Soit $(u_n)$ une suite. $(u_n)$ est arithmétique si et seulement si pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} - u_n$ est constant.

**Exemple [Reconnaître si 3 nombres sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique] :**
On considère les nombres 34, 45 et 56. On a $56 - 45 = 11$ et $45 - 34 = 11$ donc les trois nombres sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison 11.

**Propriété :**

> On considère une suite $(u_n)$. $(u_n)$ est une suite arithmétique si et seulement si les points constituant sa représentation graphique dans un repère du plan sont alignés. On parle alors de *croissance linéaire*.

**Exemple :**
La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 + 2n$ pour tout entier naturel $n$.




**Propriété :**

> Soit $(u_n)$ une suite arithmétique et $p$ et $n$ deux entiers naturels distincts. Alors la raison $r$ de la suite est donnée par :
>
> $$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

**Exemple [Déterminer la raison d'une suite arithmétique] :**
Soit $(u_n)$ une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison de la suite. On a $u_{16} = u_{10} + 6 \times r$ où $r$ est la raison de la suite. D'où $43 = 34 + 6r$ c'est à dire $r = \frac{43-34}{6} = 1,5$.

### 1.4 Sommes de termes

**Propriété :**

Pour toute suite arithmétique $(u_n)$ et tout entier naturel $n$ :

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$$

ou pour tout entier naturel $p < n$,

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2}$$

ce qui s'écrit encore :

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n = \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

**Exemple [Savoir calculer la somme des premiers termes d'une suite arithmétique] :**
On considère la suite artihémtique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.
L'expression en fonction de $n$ de $u_n$ est $u_n = 3n + 2$.
$u_{10} = 3 \times 10 + 2 = 32$
On a donc $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = \frac{u_0+u_{10}}{2} = \frac{2+32}{2} = 17$.

## 2 Suites géométriques

### 2.1 Définition

**Définition :**

Soit $q$ un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* $q$ toute suite définie par son premier terme $u_0$ (ou $u_1$) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

**Exemple :**
Soit $(u_n)$ la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel $n$ supérieur ou égal à 1.
$(u_n)$ est une suite géométrique de raison 2.
On a $u_2 = 3 \times 2 = 6$, $u_3 = 6 \times 2 = 12$, $u_4 = 12 \times 2 = 24$, etc.

## 2.2 Expression en fonction de $n$

**Propriété (expression en fonction de $n$) :**

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme :
- $u_0$, alors $u_n = q^n u_0$ ;
- $u_1$, alors $u_n = q^{n-1} u_1$.

De manière plus générale, si $p$ et $n$ sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

**Exemple [Exprimer en fonction de $n$ le terme général d'une suite géométrique] :**
Soit $(u_n)$ la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$u_n = 5 \times 2^n$
On a par exemple $u_{12} = u_0 \times q^{12} = 5 \times 2^{12} = 5 \times 4096 = 20480$.

## 2.3 Reconnaissance

**Propriété :**

Soit $(u_n)$ une suite de premier terme $u_0$ et ne s'annulant pas.
La suite $(u_n)$ est une suite géométrique si et seulement si pour tous les entiers naturels $n$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est une constante. On parle alors de *croissance exponentielle*.

**Exemple [Reconnaître si 3 nombres sont les termes consécutifs d'une suite géométrique] :**
On considère les nombres 6, 18 et 54. On a $\frac{54}{18} = 3$ et $\frac{18}{6} = 3$ donc les trois nombres sont des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 3.

## 2.4 Sommes de termes

**Propriété :**

Si $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q$ et de premier terme $u_0$, alors :
- si $q \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{u_0(1-q^{n+1})}{1-q}$$

ou

$$\sum_{k=p}^{k=n} u_k = u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}$$

- si $q = 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0$.

**Exemple [Savoir calculer les premiers termes d'une suite géométrique] :**
On considère la suite géométrique $(u_n)$ de premier terme $u_0 = 100$ et de raison $1,02$.
L'expression en fonction de $n$ de $u_n$ est $u_n = 100 \times 1,02^n$.
On a $\sum_{k=0}^{k=10} u_k = u_0 \frac{1-q^{11}}{1-q} = 100 \frac{1-1,02^{11}}{1-1,02} \approx 1216,87$.

### 2.5 Variations

**Propriété :**

Soit $(u_n)$ une suite géométrique de premier terme strictement positif et de raison $q > 0$.
- Si $q > 1$, alors $(u_n)$ est strictement croissante ;
- Si $0 < q < 1$, alors $(u_n)$ est strictement décroissante.

## 3 Moyenne arithmétique et moyenne géométrique

**Définition :**

Soit $a$ et $b$ deux réels.
- La *moyenne arithmétique* des deux nombres $a$ et $b$ est le nombre défini par $\frac{a+b}{2}$.
- La *moyenne géométrique* de deux nombres $a$ et $b$ positifs est le nombre défini par $\sqrt{ab}$

**Propriété :**
- Trois nombres $a$, $b$ et $c$ avec $a \leq b \leq c$ suivent une progression arithmétique si et seulement si $b$ est la moyenne arithmétique de $a$ et $c$.
- Trois nombres $a$, $b$ et $c$ avec $a \leq b \leq c$ suivent une progression géométrique si et seulement si $b$ est la moyenne géométrique de $a$ et $c$.

**Exemples [reconnaître si trois nombres suivent une progression arithmétique ou géométrique] :**
- On considère les nombres 34, 45 et 56. On a $\frac{34+56}{2} = 45$ donc les trois nombres suivent une progression arithmétique de raison $56 - 45 = 11$.
- On considère les nombres 6, $b$ et 54. On suppose qu'ils suivent une progression géométrique. On a $\sqrt{6 \times 54} = 18$ donc $a = 18$ et les trois nombres suivent une progression géométrique de raison $\frac{18}{6} = 3$.

# 4 Application aux taux d'évolution

**Propriété :**

Un capital $C_0$ est placé pendant $n$ années au taux annuel de $t$ % avec intérêts composés. Alors, au bout de $n$ années, le capital disponible $C_n$ est :

$$C_n = C_0 \times (1+t)^n$$

**Définition :**

- $C_n$ est appelé *valeur acquise* par le capital $C_0$ pendant $n$ années au taux de $t$ %.
- $C_0$ est appelé *valeur actuelle* de $C_n$. On a $C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n}$.
- Deux taux correspondants à des périodes de placement différentes sont dits *équivalents* lorsque, à intérêts composés, ils donnent la même valeur acquise du capital au bout du même temps de placement.

**Exemple :**
$C_0$ est placé à 0,26 % par mois avec intérêts composés sur 12 mois.
On a :
$C_{12} = C_0 \times (1+\frac{0{,}26}{100})^{12} \approx C_0 \times 1,0317$
Donc le taux annuel équivalent au taux mensuel de 0,26 % est 3,17 %.

**Définition et propriété :**

On considère un capital de valeur actuelle $C_0$ qui subit deux évolutions successives de taux $t_1$ et $t_2$. On note $C_1$ et $C_2$ les valeurs acquises après la première et la deuxième augmentation.
Alors :

- la valeur du capital après la première évolution est $C_1 = \sqrt{C_0 C_2}$ ;
- le *coefficient multiplicateur moyen* correspondant est égal à la *moyenne géométrique* des coefficients multiplicateurs appliqués, c'est à dire :
$$c_m = \sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}$$
et le *taux moyen* appliqué est :
$$t_m = c_m - 1$$

**Exemples :**

- Un capital $C_0$ de 5000 euros placé à intérêts composés a une valeur acquise $C_2$ égale à 5600 euros après 2 ans. Alors la valeur $C_1$ acquise au bout d'un an est $C_1 = \sqrt{C_0 C_2} = \sqrt{5000 \times 5600} \approx 5291,50$ soit 5291,50 euros.
- Le prix d'un produit augmente de 5% puis de 9%. Alors le coefficient multiplicateur moyen est $\sqrt{1,05 \times 1,09} \approx 1,0698$ et le taux moyen est $0,0698$ soit $6,98\%$ d'augmentation.

# 5 Algorithmique

**Exemples d'algorithme de calcul de sommes :**

- On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_n = n^2$ pour tout entier naturel $n$.

```
def sommesTermes(n):
        S=0
        for k in range(0,n+1):
                S=S+k*k
        return S
```

  La variable $k$ est appelée *compteur* et la variable $S$ est appelée *accumulateur*.

- On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_1 = 8$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$ pour tout entier naturel $n$ non nul.

```
def sommesTermes(n):
        u=8
        S=u
        for k in range(2,n+1):
                u=3*u-2
                S=S+u
        return S
```

  La variable $k$ est appelée *compteur* et la variable $S$ est appelée *accumulateur*.