# Fonction logarithme décimal, cours de terminale STMG

F.Gaudon

21 mai 2022

## Table des matières

**1 Définition et propriétés algébriques** **2**

**2 Étude de la fonction logarithme décimal** **3**

2.1 Dérivabilité et variations . . . 3
2.2 Tableau de variation . . . 3
2.3 Tableau de signe . . . 3
2.4 Représentation graphique . . . 3
2.5 Résolution d'équations et d'inéquations . . . 4

# 1 Définition et propriétés algébriques

**Définition :**

On appelle fonction *logarithme décimal* et on note log la fonction qui à tout réel $x$ *strictement positif* associe l'unique réel $y$ tel que $10^y = x$
On a donc pour tout $x > 0$ et tout $y$ réel,
$\log(x) = y$ si et seulement si $10^y = x$.

**Exemples [Savoir résoudre des équations de la forme $10^x = y$] :**

- $\log(10^6) = 6$ ;
- $\log(10^{-11}) = -11$.
- $10^x = 2$ équivaut à $x = \log(2)$.

**Propriétés :**

- Pour tout réel $x > 0$, $10^{\log(x)} = x$ ;
- pour tout réel $x$, $\log(10^x) = x$ ;
- $\log(1) = 0$ et $\log(10) = 1$

**Preuve :**

Conséquences directes de la définition.

**Propriété fondamentale des logarithmes :**

Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

**Preuve :**

Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs, $10^{\log(a)+\log(b)} = 10^{\log(a)}10^{\log(b)} = ab$
$\log(a) + \log(b)$ est donc une solution de l'équation d'inconnue $x$, $10^x = ab$ .
Or par définition de log, l'unique solution de cette équation est $\log(ab)$.
D'où $\log(ab) = \log(a) + \log(b)$.

**Propriétés :**

Pour tous les réels $a$ et $b$ strictement positifs,

- $\log(\frac{1}{a}) = -\log(a)$ ;
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a) - \log(b)$ ;
- pour tout réel $x$, $\log(a^x) = x \log a$ ;

**Preuve :**

- D'une part, $\log(a \times \frac{1}{a}) = \log(1) = 0$.
  D'autre part, $\log(a \times \frac{1}{a}) = \log(a) + \log(\frac{1}{a})$
  Donc $\log(a) + \log(\frac{1}{a}) = 0$ et $\log(\frac{1}{a}) = -\log(a)$.
- $\log(\frac{a}{b}) = \log(a \times \frac{1}{b}) = \log(a) + \log(\frac{1}{b}) = \log(a) - \log(b)$ d'après ce qui précède.
- Admise

**Exemples [Savoir effectuer des calculs avec le logarithme décimal] :**

- $\log(10^9) + \log(10^{-5}) = 9 - 5 = 4$
- $\log(50) = \log(25 \times 2) = \log(25) + \log(2) = \log(5^2) + \log(2) = 2\log(5) + \log(2)$
- $\log(0,005) = \log(5 \times 10^{-3}) = \log(5) + \log(10^{-3}) = \log(5) - 3$
- Si $a = 2048$ et $b = 16$
  on a $\log(a) = \log(2^11) = 11\log(2)$ et $\log(b) = \log(2^4) = 4\log(2)$
  donc $\log(ab) = \log(a) + \log(b) = 11\log(2) + 4\log(2) = 15\log(2) = 15\log(2)$.

# 2 Étude de la fonction logarithme décimal

## 2.1 Dérivabilité et variations

**Propriété :**

$$\boxed{\text{La fonction log est strictement croissante sur } ]0;+\infty[.}$$

## 2.2 Tableau de variation

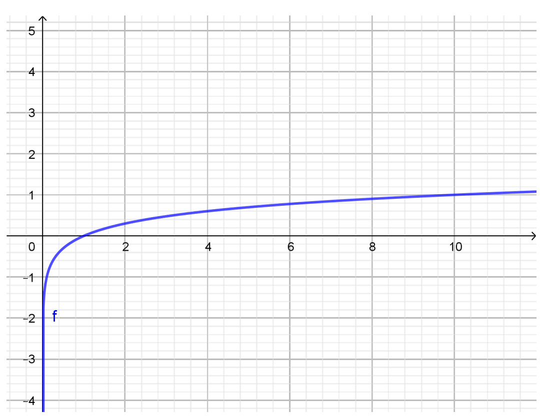
| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $\log(x)$ | $\|$ | $\nearrow$ | |

## 2.3 Tableau de signe

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\log(x)$ | $\|$ | - | $0$ | $+$ | |

## 2.4 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



## 2.5 Résolution d'équations et d'inéquations

**Propriétés :**

Pour tous les réels $x$ et $y$ strictement positifs :
$\log(x) = \log(y)$ si et seulement si $x = y$
$\log(x) < \log(y)$ si et seulement si $x < y$
$\log(x) > \log(y)$ si et seulement si $x > y$

**Exemples [Savoir résoudre des équations $\log(x) = k$] :**
Résolution de $\log(5x) = 6$ :
On a $\log(5x) = \log(10^6)$ en utilisant la propriété $\log(10^x) = x$.
Donc $5x = 10^6$ et $x = \frac{10^6}{5}$.

**Exemples [Savoir résoudre des équation $a^x = y$] :**

- Résolution de $5^x = 6$ :
  $5^x = 6$ équivaut à $\log(5^x) = \log(6)$ donc à $x\log(5) = \log(6)$ donc à $x = \frac{\log(6)}{\log(5)}$.
- La production d'un objet fabriqué initialement à 80 exemplaires par heure est prévue pour diminuer de 5% toutes les heures jusqu'à ce qu'elle atteigne 40 exemplaires par heure.
  On recherche le temps nécessaire pour arriver à 40 exemplaires :
  $80 \times 0,95^x = 40$ équivaut à $0,95^x = \frac{40}{80}$ donc à $\log(0,95^x) = \log(\frac{1}{2})$
  ou encore à $x\log(0,95) = \log(0,5)$ donc $x = \frac{\log(0,5)}{\log(0,95)} \approx 13,5$ soit 13 heures et demie.

**Exemples [Savoir résoudre des équations $x^a = y$] :**

- Résolution de $x^{0,5} = 6$ :
  $x^{0,5} = 6$ équivaut à $\log(x^{0,5}) = \log(6)$ donc à $0,5\log(x) = \log(6)$
  c'est à dire $\log(x) = \frac{\log(6)}{0,5}$ donc $x = 10^{\frac{\log(6)}{0,5}}$

- Un capital initial placé à un taux $t$ inconnu à intérêts composées double en 12 ans.
  On recherche le taux inconnu.
  On a $(1+t)^{12} = 2$ ce qui équivaut à $\log((1+t)^{12}) = \log(2)$ donc à $12\log(1+t) = \log(2)$
  ce qui équivaut encore à $\log(1+t) = \frac{\log(2)}{12}$ donc $1 + t = 10^{\frac{\log(2)}{12}}$
  D'où $t = 10^{\frac{\log(2)}{12}} - 1 \approx 0,0595$ soit 5,95% par an

**Exemple [Résoudre des inéquations $a^x < y$] :**
Résolution de $1,6^x < 3$ :
$1,6^x < 3$ équivaut à $\log(1,6^x) < \log(3)$ donc à $x\log(1,6) < \log(3)$
Donc à $x < \frac{\log(3)}{\log(1,6)}$.
L'ensemble de solutions est $]-\infty; \frac{\log(3)}{\log(1,6)}[$.