Fonction logarithme décimal, cours, T STMG

1 Définition et propriétés algébriques

Définition :

On appelle fonction *logarithme décimal* et on note log la fonction qui à tout réel x *strictement positif* associe l'unique réel y tel que ....
On a donc pour tout $x > 0$ et tout y réel,
$\log(x) = y$ si et seulement si ....

Propriétés :

- Pour tout réel $x > 0$, $10^{\log(x)} =$ .... ;
- pour tout réel x, $\log(10^x) =$ ..... ;
- $\log(1) =$ .... et $\log(10) =$ ....

Preuve :
Conséquences directes de la définition.

Exemples :

- $\log(10^6) =$ .... ;
- $\log(10^{-11}) =$ ....
- $10^x = 2$ équivaut à $x =$ ..... ;

Propriété (équation fonctionnelle) :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

....

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\log(\frac{1}{a}) =$ ....
- $\log(\frac{a}{b}) =$ ....
- pour tout entier relatif n, $\log(a^n) =$ ....

Preuve :

- D'une part, $\log(a \times \frac{1}{a}) = ...$
  D'autre part, $\log(a \times \frac{1}{a}) = \log(a) + \log(\frac{1}{a})$
  Donc $\log(a) + \log(\frac{1}{a}) = ...$ et $\log(\frac{1}{a}) = ...$
- $\log(\frac{a}{b}) = ...$
- On utilise le fait que $\log(a^n) = \underbrace{\log(a) + \log(a) + ... \log(a)}_{n\text{fois}}$

Exemples :

- $\log(10^9) + \log(10^{-5}) = ...$
- $\log(50) = ...$
- $\log(0,005) = ...$

2 Étude de la fonction logarithme décimal

2.1 Dérivabilité et variations

Propriété :

$\boxed{\text{La fonction log est strictement .... sur }]0;+\infty[.}$

2.2 Tableau de variation

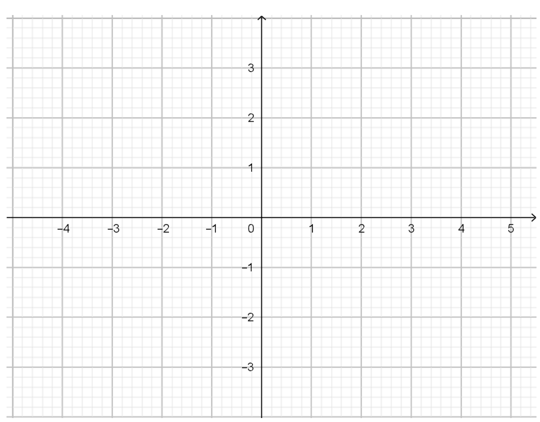
x	....		....
$\log(x)$	....	......	

2.3 Tableau de signe

x	....		....		.....
$\log(x)$	...	....	....	....	

2.4 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



2.5 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriétés :

Pour tous les réels x et y strictement positifs :
$\log(x) = \log(y)$ si et seulement si ....
$\log(x) < \log(y)$ si et seulement si ....
$\log(x) > \log(y)$ si et seulement si ....

Exemples :

- Résolution de $\log(5x) = 6$:
  On a $\log(5x) = \log(...........)$ d'après la propriété $\log(10^x) =$ ....
  Donc .... d'où $x =$...... .
- Résolution de $5^x = 6$:
  $5^x = 6$ équivaut à .... donc à ....
  donc à ....
- La production d'un objet fabriquée initialement à 80 exemplaires par heure est prévue pour diminuer de 5% toutes les heures jusqu'à ce qu'elle atteigne 40 exemplaires par heure.
  On recherche le temps nécessaire pour arriver à 40 exemplaires :
  $80 \times 0,95^x = 40$ équivaut à .... donc à ....
  ou encore à .... donc ....
  soit ....

Exemples :

- Résolution de $x^{0,5} = 6$:
  $x^{0,5} = 6$ équivaut à .... donc à ....
  c'est à dire ....
  donc ....
- Un capital initial placé à un taux t inconnu à intérêts composées double en 12 ans.
  On recherche le taux inconnu.
  On a .... ce qui équivaut à ....
  donc à .... ou encore ....
  ce qui équivaut encore à .... donc ....
  D'où ....
  soit .... par an .

Exemple [Résoudre des inéquations $a^x < y$] :

Résolution de $1,6^x < 3$:

$1,6^x < 3$ équivaut à .... donc à ....

Donc à ....

L'ensemble de solutions est ....