Fonction inverse

1 Étude de la fonction inverse

Définition :

On appelle fonction *inverse* la fonction définie pour tout nombre réel appartenant à $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f : x \mapsto = \dfrac{1}{x}$.

Tableau de valeurs :

x	-4	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{2}$	-1	-2	$\|\|$	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Propriété :

La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et sa dérivée est :

$$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$$

Preuve :

On a pour tout réel a non nul et tout réel h tel que $a+h \neq 0$,
$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-h}{a(a+h)} \times \frac{1}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$
qui tend vers $-\frac{1}{a^2}$ quand h tend vers 0.

Variations (propriété) :

La fonction inverse est :

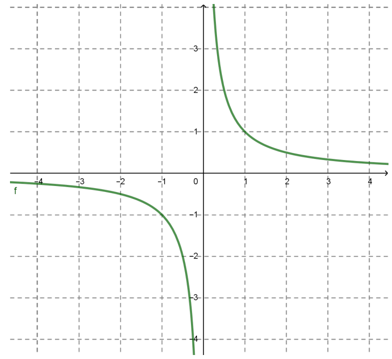
- strictement *décroissante* sur $]-\infty;0[$;
- strictement *décroissante* sur $]0;+\infty[$.

Preuve :

Sur $]-\infty;0[$, sa fonction dérivée $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ étant strictement négative, la fonction inverse est strictement décroissante.
Sur $]0;+\infty[$, sa fonction dérivée étant aussi strictement négative, la fonction inverse est strictement décroissante.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	

Représentation graphique :
La représentation graphique de la fonction inverse est appelée *hyperbole*.



Signe :
La fonction inverse est *négative* sur $]-\infty;0[$ et *positive* sur $]0;+\infty[$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		-	||	+	

comportement aux bornes de son ensemble de définition, propriété et définition :

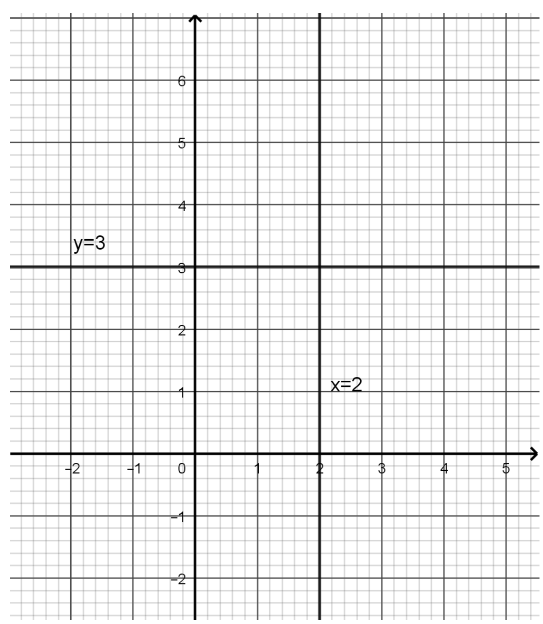
La représentation graphique admet deux *asymptotes* : l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.

- Lorsque x devient de plus en plus proche de 0, $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus grand en valeur absolue. On dit que l'axe des ordonnées est une *asymptote verticale* à la courbe représentative de la fonction inverse.
- Lorsque x devient de plus en plus grand en valeur absolue, $\frac{1}{x}$ devient de plus en plus proche de 0. On dit que l'axe des abscisses est une *asymptote horizontale* à la courbe représentative de la fonction inverse.

Propriété (rappel) :

Soit k un réel.

- L'équation $x = k$ est l'équation de la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point de coordonnées $(k;0)$.
- L'équation $y = k$ est l'équation de la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0;k)$.



2 Application à l'étude de fonctions

Exemple [Étude d'une fonction somme d'une fonction polynomiale et de la fonction inverse] :
On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 2x + 1 + \frac{8}{x}$.
On a $f'(x) = 2 + 8 \times -1x^2 = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2}{x^2} - \frac{8}{x^2} = \frac{2x^2-8}{x^2}$.
Par ailleurs, on constate que $2(x-2)(x+2) = 2(x^2 - 2x + 2x - 4) = 2(x^2 - 4) = 2x^2 - 8$
donc $f'(x) = \frac{2(x-2)(x+2)}{x^2}$
Comme pour tout réel x non nul, $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 8 = 2(x-2)(x+2)$
En outre $a = 2$ donc $a > 0$ donc le signe de $2x^2 - 8$ est + 0 - 0 + d'où :

x	0		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	-	0	$+$	
f	$\|\|$	$\searrow$		$\nearrow$	
	$\|\|$		$f(2) = 9$		