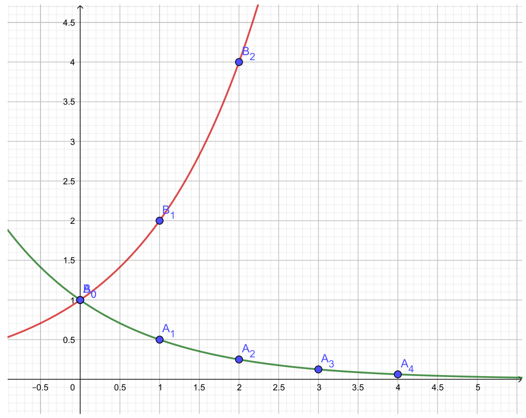
Fonctions exponentielles, cours, terminale STMG

F.Gaudon

19 avril 2022

Table des matières

1 Définition et propriétés algébriques



Définition :

On considère un réel a strictement positif et (a^n) la suite géométrique de raison a et de premier terme $a^0 = 1$. En reliant « régulièrement » les points représentant cette suite dans un repère, on obtient, pour les abscisses $x \geq 0$, la courbe représentative d'une nouvelle fonction que l'on peut définir sur $\mathbb{R}$ en tenant compte de $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
On appelle *fonction exponentielle de base a* cette fonction définie sur $]-\infty; +\infty[$: à tout réel x, elle associe le nombre noté a^x qui se lit « a puissance x ».

Exemples :

- $2^{0,5} \approx 1,41$
- $0,5^{0,5} \approx 0,71$
- $2^{1,5} \approx 2,83$
- $0,5^{1,5} \approx 0,35$

Propriétés :

Soit $a > 0$ et x et y deux réels. On a :

- $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
- $a^{x+y} = a^x a^y$;
- $a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$;
- pour tout entier relatif n, $a^{nx} = (a^x)^n$;
- pour tout réel $b > 0$, $(ab)^x = a^x b^x$.

Exemples :

- $2^5 \times 2^7 = 2^{12}$
- $2^x 3^x = 6^x$
- $3^5 \times 2^5 = 6^5$
- $(2x)^3 = 2^3 \times x^3 = 8x^3$
- $\frac{5^9}{5^7} = 5^{9-7} = 5^2 = 25$

2 Variations

Propriété :

Sur tout intervalle I, la fonction $x \mapsto a^x$ est :
- strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$ si $a > 1$;
- strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$ si $0 < a < 1$;
- constante si $a = 1$.

Exemples [Savoir reconnaître le sens de variations d'une fonction exponentielle] :
$x \mapsto 0,5^x$ est strictement décroissante sur $]-\infty; +\infty[$ et $x \mapsto 2^x$ est strictement croissante sur $]-\infty; +\infty[$.

Propriété :

Soit a un réel strictement positif et k un réel non nul.
- Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto ka^x$ a le même sens de variation que la fonction $x \mapsto a^x$;
- si $k < 0$, la fonction $x \mapsto ka^x$ a le sens de variation contraire à la fonction $x \mapsto a^x$.

3 Application aux évolutions successives

3.1 Taux global

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, ..., t_n à partir d'une valeur initiale y_0, alors la quantité finale y_n est :

$$y_n = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)y_1$$

Le *coefficient multiplicateur global* est :

$$\frac{y_n}{y_1}$$

ou

$$(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$$

Le *taux d'évolution global* est :

$$\frac{y_n - y_1}{y_1}$$

ou

$$(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n) - 1$$

Exemples :

- La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 4% les deux années suivantes.
$$(1 + \frac{2,3}{100})(1 - \frac{4}{100})^2 \approx 0,9428$$
Le coefficient multiplicateur global est 0,9428 soit un taux global d'évolution de $0,9428 - 1 = -0,0572$ soit une baisse de 5,72% (remarque : ce n'est pas la somme des taux successifs : $2,3 - 4 - 4 = -5,7$).
- Si la population de la ville était de 16 000 habitants en 2010 et de 18 000 habitants en 2012, alors le taux global d'évolution entre ces deux années est $\frac{18000-16000}{16000} = 0,125$ soit 12,5% d'augmentation.

3.2 Application au calcul de taux moyens

Propriété :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ appelé racine n-ième du nombre a.

Exemple :
$x^3 = 64$ si et seulement si $x = 64^{\frac{1}{3}}$ c'est à dire $x = 4$.

Propriété et définition :

On considère une quantité qui subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, …, t_n, et donc de taux global $t = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n) - 1$.
On appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre donné par :
$$((1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n))^{\frac{1}{n}}$$
ou
$$(1 + t)^{\frac{1}{n}}$$
On appelle *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre donné par :
$$((1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n))^{\frac{1}{n}} - 1$$
ou
$$(1 + t)^{\frac{1}{n}} - 1$$
C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2, etc. successivement appliqués.

Exemples :

- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %.
$(1 + \frac{2}{100})(1 - \frac{30}{100}))^{\frac{1}{2}} = 0,714^{\frac{1}{2}} \approx 0,8450$.
En outre, $0,8450 - 1 = -0,1550$ soit 15,5 % de baisse annuelle en moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation.
On a $(1 + t)^4 = 1,6$ donc $1 + t = 1,6^{\frac{1}{4}}$ donc $t = 1,6^{\frac{1}{4}} - 1$ d'où $t \approx 0,1247$ c'est à dire 12,47 % d'augmentation par an en moyenne.