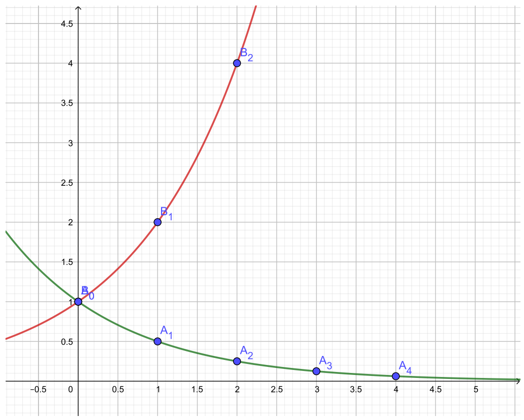
Fonctions exponentielles, cours, classe de terminale STMG

1 Définition et propriétés algébriques



Définition :

On considère un réel a strictement positif et (a^n) la suite géométrique de raison a et de premier terme $a^0 = 1$. En reliant les points représentant cette suite dans un repère « régulièrement », on obtient, pour les abscisses $x \geq 0$, la courbe représentative d'une nouvelle fonction que l'on peut définir sur $\mathbb{R}$ en tenant compte de $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
On appelle *fonction exponentielle de base a* cette fonction.
Elle est définie sur $]-\infty; +\infty[$.
Á tout réel x, elle associe le nombre noté .... qui se lit « .... ».

Exemples :

- $2^{0,5} \approx$ ....
- $0,5^{0,5} \approx$ .....
- $2^{1,5} \approx$ ......
- $0,5^{1,5} \approx$ ......

Propriétés :

Soit $a > 0$ et x et y deux réels. On a :

- $a^{-x} =$ ....
- $a^x a^y =$ .... ;
- $\dfrac{a^x}{a^y} =$ .... ;
- Pour tout entier relatif n, $(a^x)^n =$ .... ;
- Pour tout réel $b > 0$, $(ab)^x =$ .... ;

Exemples :

- $3^6 \times 3^5 = ...$
- $2^x 3^x = ...$
- $3^5 \times 2^5 = ...$
- $\frac{5^9}{5^6} = ...$
- $(2x)^3 = ...$

2 Variations

Propriété :

Sur tout intervalle I, la fonction $x \mapsto a^x$ est :

- strictement .... sur $]-\infty; +\infty[$ si $a > 1$;
- strictement .... sur $]-\infty; +\infty[$ si $0 < a < 1$;
- constante si $a = 1$.

Exemples [Savoir reconnaître les variations d'une fonction exponentielle] :
$x \mapsto 0,5^x$ est strictement .... sur $]-\infty; +\infty[$
et $x \mapsto 2^x$ est strictement .... sur $]-\infty; +\infty[$.

Propriété :

Soit a un réel strictement positif et k un réel non nul.

- Si $k > 0$, la fonction $x \mapsto ka^x$ a .... la fonction $x \mapsto a^x$;
- si $k < 0$, la fonction $x \mapsto ka^x$ a .... la fonction $x \mapsto a^x$.

Exemples [Savoir reconnaître les variations d'une fonction exponentielle] :
$x \mapsto 3 \times 0,5^x$ est strictement .... sur $]-\infty; +\infty[$
et $x \mapsto -0,2 \times 2^x$ est strictement .... sur $]-\infty; +\infty[$.

3 Application aux évolutions successives

3.1 Taux global

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, ..., t_n à partir d'une valeur initiale y_0, alors la quantité finale y_n est :

....

Le *coefficient multiplicateur global* est :

....

ou

....

Le *taux d'évolution global* est :

....

ou

....

Exemples :

- La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 4% les deux années suivantes.
  ...
  ...
  Le coefficient multiplicateur global est ....
  soit un taux global d'évolution de ....
  soit une baisse de .... (remarque : ce n'est pas la somme des taux successifs : $2,3-4-4=-5,7$).
- Si la population de la ville était de 16 000 habitants en 2010 et de 18 000 habitants en 2012, alors le taux global d'évolution entre ces deux années est
  ....
  soit .... d'augmentation.

3.2 Application au calcul de taux moyens

Propriété :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre .... appelé racine n-ième du nombre a.

Exemple :
$x^3 = 64$ si et seulement si $x =$......................
c'est à dire $x =$ ....

Propriété et définition :

On considère une quantité qui subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, ..., t_n, et donc de taux global $t = (1 + t_1)(1 + t_2) \dots (1 + t_n) - 1$.
On appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre donné par :

....

ou

....

On appelle *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre donné par :

....

ou

....

C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2, etc. successivement appliqués.

Exemples :

- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %.

  ....

  En outre, $0,8450 - 1 = -0,1550$ soit 15,5 % de baisse annuelle en moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation.

  On a ....

  donc ....

  donc ....

  d'où ....

  c'est à dire .... d'augmentation par an en moyenne.