Loi de Bernoulli et loi binomiale, cours, terminale STMG

1 Loi de Bernoulli

Définition :

Soit p un nombre réel tel que $p \in [0;1]$. Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre p si :

- X prend pour seules valeurs ....
- $P(X = ...) = ...$ et $P(X = ...) = ...$

Algorithmique :

Algorithme de simulation d'une épreuve de Bernoulli de paramètre p.

```
Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ;
Début traitement
    t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
    si ............ alors
        Afficher "Succès" ;
    fin
    sinon
        Afficher "Échec" ;
    fin
Fin
```

Exemple :

Tester la conformité d'un produit par rapport à un critère de qualité est une expérience de Bernoulli.

2 Schéma de Bernoulli

Définition :

Deux expériences sont dites *indépendantes* si ....

Exemple :

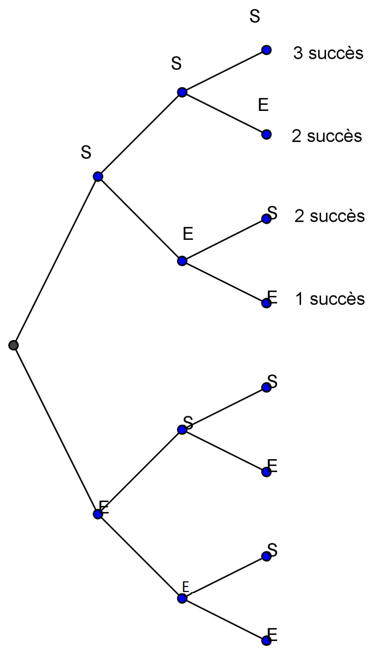
il y a indépendance lorsqu'on lance deux fois de suite une pièce de monnaie.

Définition :

La répétition d'une expérience aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p, ceci n fois de manière indépendante, constitue .... de paramètres .... et ....

Exemple de savoir faire :

- **[Construire un arbre représentant un schéma de Bernoulli de paramètres donnés]**
  On contrôle la qualité d'un produit sur une chaîne de production. On prélève 3 produits au hasard. On suppose que les prélèvements sont indépendants. Statistiquement, chaque produit a une probabilité $p = 0,05$ d'être défectueux.
  On a donc un .... de paramètres ...... et ....



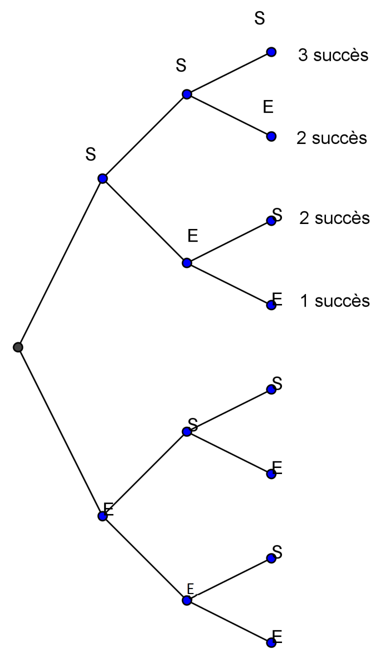
- **[Calculer la probabilité d'un événement représenté par un chemin sur un arbre pondéré]**
  Sur l'arbre ci-dessus représentant un schéma de Bernoulli de paramètres .... et ...., la probabilité d'avoir les deux premières expériences qui donnent un succès et la dernière qui donne un échec est ....
  soit .... de chances d'avoir les deux premiers produits défectueux et le dernier conforme sur les trois prélevés.

3 Loi binomiale

Définition et propriété :

Soient n et k deux entiers naturels avec $k \leq n$. On note $\binom{n}{k}$ (on dit « k sous n ») le nombre de manières d'obtenir ...... succès et .... échecs pour .... répétitions indépendantes de la même expérience de Bernoulli.

$\binom{3}{3} = 1$: il y a une seule manière d'obtenir 3 succès lors de la répétition de 3 épreuves identiques indépendantes.
$\binom{3}{2} = 3$: il y a trois manières d'obtenir 2 succès et un échec lors de la répétition de 4 épreuves identiques indépendantes (SSE ; SES ; ESS).



Définition :
On considère une épreuve de Bernoulli de paramètre $p \in [0; 1]$. On répète n fois ($n \geq 1$) cette expérience indépendamment et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès. On dit alors que la variable aléatoire X suit une loi *binomiale* de paramètres n et p et on note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Propriété :
Si X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors la probabilité d'obtenir k succès avec $k \in \{0; 1; 2; ...; n\}$ est

....

Preuve :
Il y a $\binom{n}{k}$ manières d'obtenir k succès dans n répétitions d'expériences identiques et indépendantes. La probabilité de chacun de ces événements est .... Ces événements sont tous indépendants donc on ajoute .... fois cette probabilité d'où le résultat.

Exemple de savoir faire :

[Calculer la probabilité de $P(X = k)$ où X suit une loi binomiale à partir d'un arbre pondéré]

On considère le problème précédent de test des produits d'une chaîne de production. Les prélèvements étant supposés indépendants les uns des autres, l'expérience constitue un schéma de Bernoulli de paramètres $n = ...$ et $p = ...$ La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres $n = ...$ et $p = ...$

On a $P(X = 2) =$............... ....

car ...... chemins permettent d'obtenir deux succès c'est à dire deux objets défectueux.

D'où $P(X = 2) =$................ ....

donc $P(X = 2) =$.................. ....

soit une probabilité .... d'avoir deux produits défectueux.

Propriétés :

- On a $P(X < k) = P(X \leq ....)$
- pour calculer $P(X > k)$, on calcule ....

Exemples :

- $P(X < 2) = ...$
  Comme $P(X = 0) =.....$
  et $P(X = 1) =.....$
  On obtient $P(X < 2) \approx ....$
- $P(X > 1) = ...$
  On a vu que $P(X \leq 1) \approx ...$
  on obtient $P(X > 1) \approx ...$

Propriété :

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p. Alors : *l'espérance mathématique* notée $E(x)$ est égale à $E(X) =......$

L'espérance mathématique donne le nombre moyen de succès sur un grand nombre de simulations de n essais.

Exemple :

Dans l'exemple du chapitre,

$E(x) = np = 3 \times 0,05 = 0,15$

soit en moyenne, 0,15 objets défectueux sur 3 tests sur un grand nombre de tests donc 15 objets défectueux en moyenne sur 300 tests.

Algorithmique :
Algorithme de simulation d'une loi binomiale de paramètres n et p.

Données : p : nombre décimal entre 0 et 1 ; n : entier naturel ;
Début traitement
    c prend la valeur ..... ;
    pour k *de 1 jusque* ..... **faire**
        t prend une valeur aléatoire décimale entre 0 inclus et 1 exclu ;
        si ...... **alors**
            c prend la valeur de .... ;
        fin
    fin
Fin
Sorties : c

4 Coefficients binomiaux

Propriétés :

- $\binom{n}{k} = \binom{.....}{.....}$;
- $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} =$..........

Triangle de Pascal :
Le triangle de Pascal, du nom de Blaise Pascal, mathématicien français du XVII^{e} siècle qui le« redécouvra » en Occident (car il était connu avant en Orient et au Moyen-Orient) est une disposition permettant de visualiser et de calculer les coefficients binomiaux et qui s'appuie sur la formule précédente.

$\binom{0}{0} = 1$					
$\binom{1}{0} = 1$	$\binom{1}{1} = 1$				
$\binom{2}{0} = 1$	$\binom{2}{1} =$	1			
$\binom{3}{0} = 1$	$\binom{3}{1} =$....	....	1		
1	....	....	....	1	
1	....	....	....	....	1

Explication de la construction : le nombre de la ligne n et de la colonne k est le coefficient binomial $\binom{n-1}{k-1}$. Il est obtenu en ajoutant le nombre situé au dessus (ligne $n-1$ et colonne k) au nombre de la colonne et de la ligne précédente (ligne $n-1$ et colonne $k-1$).
Par exemple, $\binom{3}{1} = 3$ est la somme de $\binom{2}{1} = 2$ et de $\binom{2}{0} = 1$.

1					
1	1				
1	...	...			
1	...	...	1		
1	.....	....	....	1	
1	.....	.....	....	.....	1