Étude de quotients, cours, terminale STMG

F.Gaudon

3 juillet 2015

Table des matières

1 Dérivation de quotients

Propriété :
On considère la fonction inverse f définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ pour tout x appartenant à $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$. Alors sa fonction dérivée est donnée par

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Propriété :
Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, avec pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors $\frac{u}{v}$ est définie et dérivable sur I et

$$(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

2 Étude de quotients

Exemple 1 d'étude de quotient :
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{4}{2x+3}$ pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$.
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec
$u(x) = 4$ et $v(x) = 2x + 3$ donc $u'(x) = 0$ et $v'(x) = 2$.
On a $f'(x) = \frac{u'v-v'u}{v^2} = \frac{0\times(2x+3)-2\times4}{(2x+3)^2}$.
D'où $f'(x) = \frac{-8}{(2x+3)^2}$.
Pour tout x appartenant à $[3; +\infty[$, le carré $(2x + 3)^2$ est strictement positif donc $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $[3; +\infty[$.
D'où le tableau de variations :

x	3 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	-
$f(x)$	$\searrow$

Exemple 2 d'étude de fonction avec quotient :

Soit f la fonction définie sur $[\frac{1}{2};+\inf[$ par $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$.

$u(x)=x^2+1$. $v(x)=x$. $u'(x)=2x$. $v'(x)=1$.

Pour tout réel $x\neq 0$, $f'(x)=\frac{u'v-v'u}{v^2}(x)=\frac{2x\times x-1\times(x^2+1)}{x^2}$

$f'(x)=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}$

$f'(x)=\frac{x^2-1}{x^2}$

On doit donc résoudre l'équation du second degré $x^2-1=0$.

$x^2-1=0$ de la forme $ax^2+bx+c=0$ avec $a=1$, $b=0$ et $c=-1$.

$\Delta=b^2-4ac=0^2-4\times 1\times(-1)=4$.

$\Delta>0$ donc il y a deux solutions :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

D'où $x_1=\frac{-0+\sqrt{4}}{2\times 1}$ et $x_2=\frac{-0-\sqrt{4}}{2\times 1}$

Donc $x_1=1$ et $x_2=-1$. x_2 n'est pas dans l'intervalle.

On a donc le tableau de variation :

x	$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	