

Etude de fonctions polynômes, cours, terminale STMG

F.Gaudon

28 novembre 2018

Table des matières

1	Fonction dérivée	2
2	Opérations sur les fonctions dérivables	2
2.1	Somme	2
2.2	Multiplication par un nombre réel k	2
3	Étude de fonctions	3
3.1	Du sens de variation au signe de la dérivée	3
3.2	Du signe de la dérivée au sens de variation	3
4	Exemples d'étude de fonctions polynômes	5

1 Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont l'expression algébrique est donnée dans la première colonne du tableau ci-dessous. On appelle de la fonction f la fonction notée dont l'expression algébrique est donnée dans le tableau ci-dessous. Pour tout réel a de l'ensemble de définition de f' , on appelle $f'(a)$ l'image de a par f' . On dit alors que f est en a .

$f(x)$	$f'(x)$	ensemble de définition de f'
$ax^2 + bx + c$ avec a, b, c réels	\mathbb{R}
$ax^3 + bx^2 + cx + d$ avec a, b, c et d réels	\mathbb{R}
constante réelle k	\mathbb{R}
x	\mathbb{R}
$mx + p$ avec m et p réels	\mathbb{R}
x^2	\mathbb{R}
x^n avec n entier naturel	\mathbb{R}

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Somme

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I , alors $u + v$ est définie et dérivable sur I et :

$$(u + v)' = \dots\dots\dots$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = x + 3x^2$.

- Méthode 1 : On peut poser $u(x) = \dots\dots$ et $v(x) = \dots\dots$ u et v sont deux fonctions de référence. On a pour tout x strictement positif $u'(x) = \dots\dots$ et $v'(x) = \dots\dots$ donc $f'(x) = \dots\dots$
- Méthode 2 : f est une fonction polynôme du 2nd degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = \dots\dots$, $b = \dots\dots$ et $c = \dots\dots$. D'où la dérivée est donnée par $f'(x) = \dots\dots\dots$

2.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :

Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

$$(ku)' = \dots\dots\dots$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 5x^3$.

- Méthode 1 : on peut poser $u(x) = \dots\dots$, la fonction u est une fonction de référence et on a pour tout x réel $u'(x) = \dots\dots$ donc $f'(x) = \dots\dots$
- Méthode 2 : on remarque que f est une fonction polynôme du 3^e degré $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + s$ avec $a = \dots, b = \dots, c = \dots$ et $d = \dots$. On a alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = \dots\dots\dots$

3 Étude de fonctions

3.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f est croissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \geq 0$;
- si f est décroissante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) \leq 0$;
- si f est constante sur I , alors pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$.

Exemple :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3	-1	0	5
variations de $f(x)$	4		1	0
		↘	↗	↘
		-2		

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x
$f'(x)$

3.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I , $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est $\dots\dots\dots$ sur I ;
- si pour tout réel x de I , $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est $\dots\dots\dots$ sur I ;
- si pour tout réel x de I , $f'(x) = 0$, alors f est $\dots\dots\dots$ sur I .

Exemple avec un tableau de signes :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3	-2	0	5	
signe de $f'(x)$	+	0	-	0	+

Le tableau de variations de f est :

x	-3	-2	0	5
variations de $f(x)$			

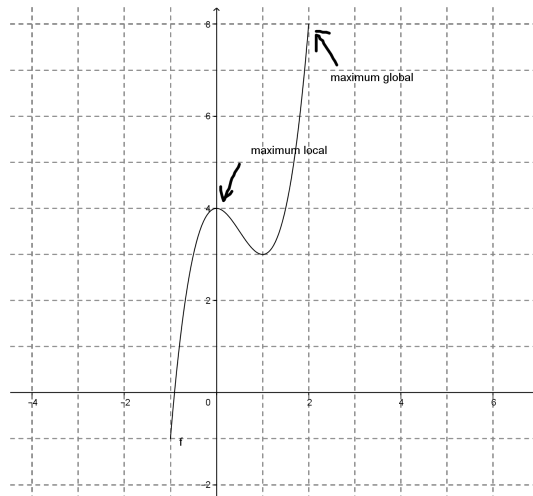
Exemple par le calcul :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = \dots\dots\dots$. Donc pour tout réel x , $f'(x) \dots\dots\dots$ et par conséquent, f est une fonction $\dots\dots\dots$ sur \mathbb{R} .

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I .

- Dire que $f(x_0)$ est un **maximum local** de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J , $f(x) \leq f(x_0)$.
- Dire que $f(x_0)$ est un **minimum local** de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J , $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un **extremum local**.



Propriété :

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a; b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0 , alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x	x_0
Signe de $f'(x)$
Variations $f(x)$

Cas d'un maximum :

x	x_0
Signe $f'(x)$
Variations $f(x)$

4 Exemples d'étude de fonctions polynômes

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $] - \infty; +\infty[$ par $f(x) = 3x^2 + 7x$. f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x ,
 $f'(x) = \dots\dots\dots$

$f'(x) = 0$ si et seulement si $\dots\dots\dots$ c'est à dire $x = \dots\dots\dots$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$	$\dots\dots\dots$	$+\infty$
$f'(x)$
$f(x)$

Exemple 2 :

Soit f définie pour tout réel x par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

Alors $f'(x) = \dots\dots\dots$ f' est une fonction polynôme du second degré.

On résout l'équation $\dots\dots\dots$

$\dots\dots\dots$

Il y a deux solutions réelles :

$x_1 = \dots\dots$

et $x_2 = \dots\dots$

a est de signe $\dots\dots\dots$ donc la $\dots\dots\dots$ a ses branches tournées vers $\dots\dots\dots$ D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\dots\dots\dots$	$\dots\dots$	$+\infty$
$f'(x)$
$f(x)$