Etude de fonctions polynômes, cours, terminale STMG

F.Gaudon

28 novembre 2018

Table des matières

1 Fonction dérivée

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I dont l'expression algébrique est donnée dans la première colonne du tableau ci-dessous. On appelle *fonction dérivée* de la fonction f la fonction f' dont l'expression algébrique $f'(x)$ est donnée dans le tableau ci-dessous. Pour tout réel a de l'ensemble de définition de f', on appelle *nombre dérivé* $f'(a)$ l'image de a par f'. On dit alors que f est *dérivable* en a.

$f(x)$	$f'(x)$	ensemble de définition de f'
ax^2+bx+c avec a, b, c réels	$2ax+b$	$\mathbb{R}$
ax^3+bx^2+cx+d avec a, b, c et d réels	$3ax^2+2bx+c$	$\mathbb{R}$
constante réelle k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$ avec m et p réels	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n avec n entier naturel no nul	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$

2 Opérations sur les fonctions dérivables

2.1 Somme

Propriété :

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, alors $u+v$ est définie et dérivable sur I et :

$$(u+v)' = u' + v'$$

Exemple :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x + 3x^2$.

- Méthode 1 : On peut poser $u(x) = x$ et $v(x) = 3x^2$. u et v sont deux fonctions de référence. On a pour tout x strictement positif $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 6x$ donc $f'(x) = 1 + 6x$.
- Méthode 2 : f est une fonction polynôme du 2nd degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 3$, $b = 1$ et $c = 0$. D'où la dérivée est donnée par $f'(x) = 2ax + b = 2 \times 3x + 1 = 6x + 1$.

2.2 Multiplication par un nombre réel k

Propriété :
Soient u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et k un nombre réel, alors ku est définie et dérivable sur I et :

$$(ku)' = ku'$$

Exemple :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3$.

- Méthode 1 : on peut poser $u(x) = x^3$, la fonction u est une fonction de référence et on a pour tout x réel $u'(x) = 3x^2$ donc $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$.
- Méthode 2 : on remarque que f est une fonction polynôme du 3e degré $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + s$ avec $a = 5$, $b = 0$, $c = 0$ et $d = 0$. On a alors $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c = 3 \times 5x^2 + 2 \times 0x + 0 = 15x^2$.

3 Étude de fonctions

3.1 Du sens de variation au signe de la dérivée

Propriété :
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si f est croissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$;
- si f est décroissante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) \leq 0$;
- si f est constante sur I, alors pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$.

Exemple :
Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-1		0		5
variations de $f(x)$	4	↘	-2	↗	1	↘	0

Alors la fonction dérivée f' a pour tableau de signes :

x	-3		-1		0		5
$f'(x)$		-	0	+	0	-	

3.2 Du signe de la dérivée au sens de variation

Propriété :

- Si pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ sauf en quelques points où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I ;
- si pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

Exemple avec un tableau de signes :

Soit f une fonction définie sur $[-3; 5]$ et telle que :

x	-3		-2		0		5
signe de $f'(x)$		+	0	-	0	+	

Le tableau de variations de f est :

x	-3		-2		0		5
variations de $f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

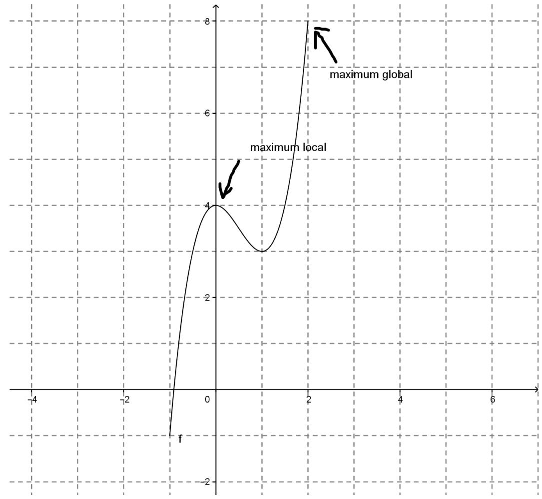
Exemple par le calcul :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 + 5$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x) = 4 \times 3x^2 = 12x^2$. Donc pour tout réel x, $f'(x) > 0$ et par conséquent, f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.

- Dire que $f(x_0)$ est un *maximum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \leq f(x_0)$.
- Dire que $f(x_0)$ est un *minimum local* de f signifie que l'on peut trouver un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 tel que pour tout x de J, $f(x) \geq f(x_0)$.
- Un minimum local ou un maximum local est appelé un extremum local.



Propriété :
Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ouvert (c'est à dire de la forme $]a;b[$)

- Si f admet un maximum ou un minimum en $x_0 \in I$ avec x_0, alors $f'(x_0) = 0$;
- si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors f admet en x_0 un extremum local.

Visualisation :

Cas d'un minimum :

x		x_0	
Signe $f'(x)$	-	0	+
Variations $f(x)$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$

Cas d'un maximum :

x		x_0	
Signe $f'(x)$	+	0	-
Variations $f(x)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$

4 Exemples d'étude de fonctions polynômes

Exemple 1 :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;+\infty[$ par $f(x)=3x^2+7x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $f'(x)=6x+7$.

$f'(x)=0$ si et seulement si $6x+7=0$ c'est à dire $x=\frac{-7}{6}$.

On a donc le tableau de variations suivant compte tenu de $m=$ ... de signe .... :

x	$-\infty$		$-\frac{7}{6}$		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		$\searrow$	$f(-\frac{7}{6})$	$\nearrow$	

Exemple 2 :

Soit f définie pour tout réel x par $f(x)=x^3-x^2-x-1$.

Alors $f'(x)=3x^2-2x-1$. f' est une fonction polynôme du second degré.

On résout l'équation $3x^2-2x+1=0$.

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4\times 3\times(-1)=16>0$.

Il y a deux solutions réelles :

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2+4}{6}=1$

et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-4}{6}=-\frac{1}{3}$.

En outre $a=3$ est positif donc la parabole a ses branches tournées vers le haut. D'où le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$	$\approx -0,81$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	