Suites de nombres, cours, terminale STMG

F.Gaudon

27 juin 2014

Table des matières

1 Suites arithmétiques

1.1 Définition

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier *terme* et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 56$ et $u_{n+1} = u_n - 4$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison -4.
On a $u_1 = u_0 - 4 = 56 - 4 = 52$, $u_2 = 52 - 4 = 48$, $u_3 = 48 - 4 = 44$.

1.2 Expression en fonction de n

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :

- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + nr$$

- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

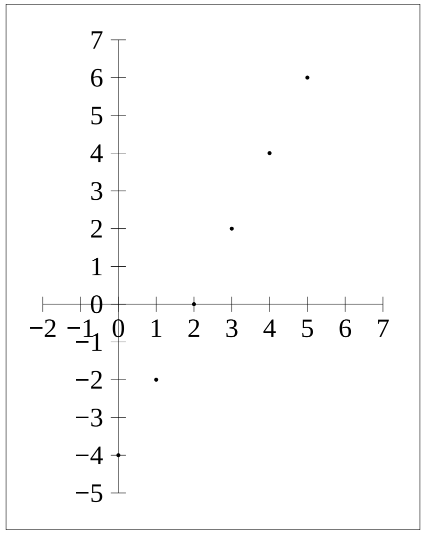
Exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$. On a par exemple, $u_{12} = u_0 + 12r = 56 + 12 \times (-4) = 8$ ou encore $u_{15} = u_12 + 3r = 8 + 3 \times (-4) = 8 - 12 = -4$.

1.3 Reconnaissance

Propriété :

On considère une suite (u_n). (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si les points constituant sa représentation graphique dans un repère du plan sont alignés.

Exemple :
La figure ci-dessous montre la représentation graphique de la suite définie par $u_n = -4 + 2n$ pour tout entier naturel n.



Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique et p et n deux entiers naturels distincts.
Alors la raison r de la suite est donnée par :

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Exemple :
Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison de la suite.
On a $u_{16} = u_{10} + 6 \times r$ où r est la raison de la suite. D'où $43 = 34 + 6r$ c'est à dire $r = \frac{43-34}{6} = 1,5$.

2 Suites géométriques

2.1 Définition

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
(u_n) est une suite géométrique de raison 2.
On a $u_2 = 3 \times 2 = 6$, $u_3 = 6 \times 2 = 12$, $u_4 = 12 \times 2 = 24$, etc.

2.2 Expression en fonction de n

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme :
- u_0, alors $u_n = q^n u_0$;
- u_1, alors $u_n = q^{n-1}u_1$.

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
On a par exemple $u_{12} = u_0 \times q^{12} = 5 \times 2^{12} = 5 \times 4096 = 20480$.

2.3 Reconnaissance

Propriété :

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0.
La suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tous les entiers naturels n, $u_{n+1} = qu_n$.

Exemple :
La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3}{2^n}$. v_n s'écrit $3 \times \frac{1}{2^n}$ donc $3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

3 Application à la gestion

Propriété :

Un capital C_0 est placé pendant n années au taux annuel de t % avec intérêts composés. Alors, au bout de n années, le capital disponible C_n est :

$$C_n = C_0 \times (1+t)^n$$

Définition :

- C_n est appelé *valeur acquise* par le capital C_0 pendant n années au taux de t %.
- C_0 est appelé *valeur actuelle* de C_n. On a $C_0 = \frac{C_n}{(1+t)^n}$.
- Deux taux correspondants à des périodes de placement différentes sont dits *équivalents* lorsque, à intérêts composés, ils donnent la même valeur acquise du capital au bout du même temps de placement.

Exemple :

C_0 est placé à 0,26 % par mois avec intérêts composés sur 12 mois.
On a :
$C_{12} = C_0 \times (1 + \frac{0{,}26}{100})^{12} \approx C_0 \times 1,0317$
Donc le taux annuel équivalent au taux mensuel de 0,26 % est 3,17 %.