Probabilités conditionnelles, cours, terminale STMG

F.Gaudon

8 juillet 2015

Table des matières

1 Rappels sur les intersections et les réunions

Définition :

Soient A et B deux événements.

- L'événement $A \cap B$ (lire "A *inter* B") est l'ensemble des issues qui réalisent à la fois A *et* B.
- Lorsqu'aucune issue ne réalise A et B, c'est à dire $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont *disjoints* ou *incompatibles*.
- L'événement $A \cup B$ (lire "A *ou* B") est l'ensemble des issues qui réalisent A *ou* B, c'est à dire au moins un des deux événements.
- L'événement $\bar{A}$ appelé événement *contraire* de A ou *complémentaire* de A est l'ensemble des issues qui ne réalisent pas A.

Propriété :

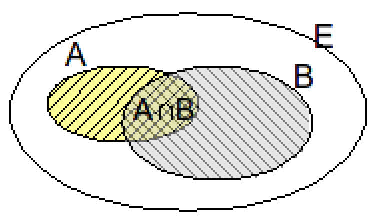
Soit P une loi de probabilité sur un ensemble E.

- Pour tous les événements A et B, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- Pour tout événement A,

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$



2 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A et tout événement B non impossible, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* et notée $P_B(A)$ le nombre

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B}$$

Exemple :

Lors d'un sondage, 50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,4$. Donc $P_C(S) = \frac{P(S\cap C)}{P(C)} = \frac{0,4}{0,75} \approx 0,53$.

Remarque :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$.

Exemple :

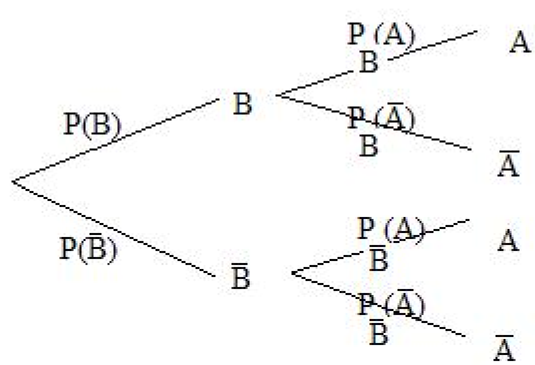
La tableau suivant montre la répartition du personnel dans une usine :

	Cadres	Ouvriers	Total
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Total	150	350	500

On rencontre un employé au hasard. On note H l'événement « l'employé rencontré est un homme » et C l'événement « l'employé rencontré est un cadre ».

On a $P(H) = \frac{300}{500} = 0,6$, $P_H(C) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ et $P_H(\bar{C}) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$. On a bien $P_H(C) + P_H(\bar{C}) = 1$. En outre, $P(H \cap C) = P(H) \times P_H(C) = 0,6 \times \frac{1}{3} = 0,2$ et $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \bar{H})$.

3 Arbre pondérés



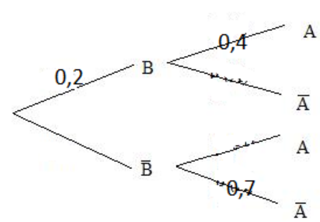
Définition :

> Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* : $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$. Un *noeud* est un point d'où partent plusieurs branches.

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$) ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$) ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose(par exemple, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$).

Exemple :



Sur l'arbre ci-dessus :
- $P_B(A) = 0,4$; $P_{\bar{B}}(\bar{A}) = 0,7$; $P(B) = 0,2$;
- $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,8$;
- $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - 0,4 = 0,6$;
- $P(B \cap A) = P(B) \times P_B(A) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$;
- $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = 0,2 \times 0,4 + 0,8 \times 0,3 = 0,32$.