

Lois normales, classe de terminale STG

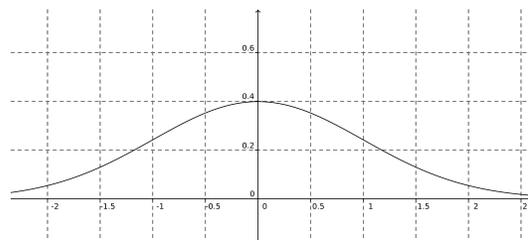
1 Étude des lois normales

Définition :

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0; 1]$. Lorsque n devient « grand » et si $np > 5$ le diagramme en bâton représentant la loi binomiale X_n de paramètres n et p se « rapproche » d'une courbe ayant la forme d'une « cloche ». On dit alors que la loi suit une *loi normale d'espérance* $\mu = np$ et *d'écart type* $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple :

Représentation graphique de la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$ appelée loi normale *centrée réduite*.



Propriété :

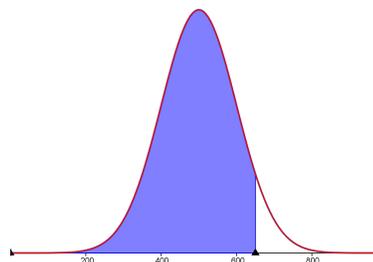
La courbe d'une loi normale est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe (Oy) et d'équation $x = \mu$ où μ est de la loi normale.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale, pour tout réel b , la probabilité $P(\dots\dots\dots)$ est l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et à gauche de la droite d'équation $x = b$.

Exemple :

Ci-contre, l'aire correspondant à la probabilité $P(X \leq 650)$ pour la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart type $\sigma = 100$.



Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ .

- L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à ;
- $P(X \leq \mu) = \dots\dots\dots$ c'est à dire que l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et à gauche de la droite d'équation $x = \mu$ est ;
- Pour tout réel b , $P(X > b) = \dots\dots\dots$;

Utilisation de la calculatrice :

Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$:

- Sur Texas Instrument : Dans le menu `distrib`, sélectionner `NormalFrép` puis taper `(a, b, μ, σ)`.
- Sur Casio : Dans le menu `STAT` choisir `DIST` puis `NORM` et `ncd` puis compléter avec les paramètres a , b , μ et σ .

Propriété :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres μ et σ alors :

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx \dots\dots\dots$$

2 Échantillonnage et estimation

2.1 Distinction entre échantillonnage et estimation

Définition :

On considère une population d'individus.

- Lorsque l'on connaît ou lorsque l'on fait une hypothèse sur la proportion p d'individus ayant une caractéristique donnée dans une population et que l'on effectue un nombre n de tirages avec remise dans cette population, la fréquence observée appartient avec une certaine probabilité à un intervalle appelé de centre p et de longueur qui diminue lorsque n augmente. On parle alors de situation
- Lorsque l'on ne connaît pas la proportion d'individus ayant une caractéristique donnée, en procédant à un nombre n de tirages avec remise on peut à l'aide de la fréquence f obtenue la proportion p d'individus ayant cette caractéristique. Cette se fait à l'aide d'un *intervalle* dont l'amplitude lorsque le nombre n de tirages augmente.

2.2 Échantillonnage

Propriété :

Un intervalle de fluctuation à au moins 95 % d'une fréquence d'un échantillon de taille n est :

.....

où p est la proportion connue dans la population ou sur laquelle on fait une hypothèse.

Remarque :

En pratique, on utilise cette propriété dès que les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1 - p) \geq 5$ sont vérifiées.

Test d'hypothèse :

On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est p . On fait l'hypothèse « La proportion dans la population est p ». On observe la fréquence f d'apparition de ce caractère sur un échantillon de taille n et on calcule l'intervalle I au seuil de 95%.

- Si $f \notin I$, au risque de 5% d'erreur (ou au seuil de confiance de 95%), on l'hypothèse que la proportion dans la population est p .
- Si $f \in I$, au risque de 5% d'erreur on l'hypothèse que la proportion dans la population est p .

Exemple :

Un fournisseur d'accès à l'internet affirme que, sur sa hotline, seuls 20% des clients attendent plus de 5 minutes pour obtenir un interlocuteur. Une association de consommateurs interroge au hasard 200 personnes ayant eu à s'adresser à cette hotline. Parmi ces personnes, 53 ont dû attendre plus de 5 minutes. Peut-on mettre en doute l'affirmation du fournisseur d'accès ?

L'hypothèse à tester est « ».

..... =

$I = [.....;] = [.....;]$.

Or donc au seuil de confiance de 95%, on l'affirmation du fournisseur d'accès.

2.3 Estimation

Propriété et définition :

Soit p la proportion inconnue d'apparition d'un caractère. On appelle f la fréquence d'apparition du caractère sur un échantillon de taille n . Alors, L'intervalle contient pour n assez grand la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95. L'intervalle est appelé intervalle de au niveau de confiance 0,95.

Remarque :

Un intervalle de au niveau de 95% a une amplitude de L'amplitude lorsque la taille n de l'échantillon augmente.

Exemple :

Un candidat à une élection municipale fait effectuer un sondage. Sur 100 personnes de la ville interrogées, 63 déclarent vouloir voter pour lui.

$I = \dots\dots\dots$

On peut donc estimer que la proportion de personnes dans la ville voulant voter pour lui est comprise dans l'intervalle $I = [\dots\dots\dots ; \dots\dots\dots]$.