Lois normales, cours, terminale STMG

F.Gaudon

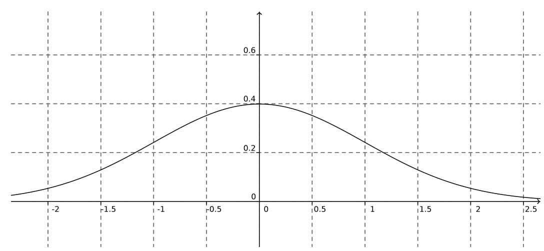
24 mai 2015

1 Étude des lois normales

Définition :

Soit n un entier naturel non nul et p un réel de l'intervalle $[0;1]$. Lorsque n devient « grand » et si $np > 5$ le diagramme en bâton représentant la loi binomiale X_n de paramètres n et p se « rapproche » d'une courbe ayant la forme d'une « cloche ». On dit alors que la variable aléatoire suit une *loi normale d'espérance* $\mu = np$ et *d'écart type* $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Exemple :
Représentation graphique de la loi normale d'espérance $\mu = 0$ et d'écart type $\sigma = 1$ appelée loi normale *centrée réduite*.



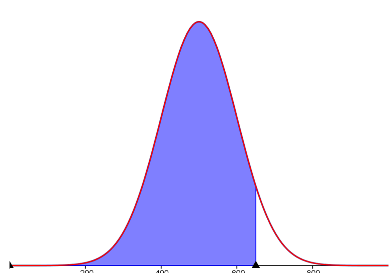
Propriété :

La courbe d'une loi normale est symétrique par rapport à une droite parallèle à l'axe (Oy) et d'équation $x = \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est *l'espérance* de la loi normale.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire qui suit une loi normale, pour tout réel b, la probabilité $P(X \leq b)$ est l'aire de la surface comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et à gauche de la droite d'équation $x = b$.

Exemple :
Ci-contre, l'aire correspondant à la probabilité $P(X \leq 650)$ pour la loi normale d'espérance $\mu = 500$ et d'écart type $\sigma = 100$.



Propriétés :

Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale d'espérance μ et d'écart type σ.
- L'aire totale comprise entre la courbe et l'axe des abscisses est égale à 1 ;
- $P(X \leq \mu) = \frac{1}{2}$ c'est à dire que l'aire comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et à gauche de la droite d'équation $x = \mu$ est $\frac{1}{2}$;
- Pour tout réel b, $P(X > b) = 1 - P(X \leq b)$;
- Pour tous les réels a et b, $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$;

Utilisation de la calculatrice :

Pour calculer $P(a \leq X \leq b)$:
- Sur Texas Instrument : Dans le menu $\boxed{\text{distrib}}$, sélectionner $\boxed{\text{NormalFrép}}$ puis taper $\boxed{a}\boxed{,}\boxed{b}\boxed{,}\boxed{\mu}\boxed{,}\boxed{\sigma}\boxed{)}$
- Sur Casio : Dans le menu $\boxed{\text{STAT}}$ choisir $\boxed{\text{DIST}}$ puis $\boxed{\text{NORM}}$ et $\boxed{\text{ncd}}$ puis compléter avec les paramètres a, b, μ et σ.

Propriété :

Si X est une variable aléatoire suivant la loi normale de paramètres μ et σ alors :

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,95$$

2 Échantillonnage et estimation

2.1 Distinction entre échantillonnage et estimation

Définition :

On considère une population d'individus.
- Lorsque l'on connaît ou lorsque l'on fait une hypothèse sur la proportion p d'individus ayant une caractéristique donnée dans une population et que l'on effectue un nombre n de tirages avec remise dans cette population, la fréquence observée appartient avec une certaine probabilité à un intervalle appelé *intervalle de fluctuation* de centre p et de longueur qui diminue lorsque n augmente. On parle alors de situation *d'échantillonnage*.
- Lorsque l'on ne connaît pas la proportion d'individus ayant une caractéristique donnée, en procédant à un nombre n de tirages avec remise on peut estimer à l'aide de la fréquence f obtenue la proportion p d'individus ayant cette caractéristique. Cette *estimation* se fait à l'aide d'un *intervalle de confiance* dont l'amplitude diminue lorsque le nombre n de tirages augmente.

2.2 Échantillonnage

Propriété :

Un intervalle de fluctuation à au moins 95 % d'une fréquence d'un échantillon de taille n est :

$$[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}]$$

où p est la proportion connue dans la population ou sur laquelle on fait une hypothèse.

Remarque :
En pratique, on utilise cette propriété dès que les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont vérifiées.

Test d'hypothèse :
On considère une population dans laquelle on suppose que la proportion d'un caractère est p.On fait l'hypothèse « La proportion dans la population est p ». On observe la fréquence f d'apparition de ce caractère sur un échantillon de taille n et on calcule l'intervalle de fluctuation I au seuil de 95%.

- Si $f \notin I$, au risque de 5% d'erreur (ou au seuil de confiance de 95%), on rejette l'hypothèse que la proportion dans la population est p.
- Si $f \in I$, au risque de 5% d'erreur on ne peut pas rejeter l'hypothèse que la proportion dans la population est p.

Exemple :
Un fournisseur d'accès à l'internet affirme que, sur sa hotline, seuls 20% des clients attendent plus de 5 minutes pour obtenir un interlocuteur. Une association de consommateurs interroge au hasard 200 personnes ayant eu à s'adresser à cette hotline. Parmi ces personnes, 53 ont dû attendre plus de 5 minutes. Peut-on mettre en doute l'affirmation du fournisseur d'accès ?

L'hypothèse à tester est « 20 % des clients attendent plus de 5 minutes ».
$\frac{53}{200} = 0,265$
$I = [0,2 - \frac{1}{\sqrt{200}}; 0,2 + \frac{1}{\sqrt{200}}] = [0,129; 0,271]$.
Or $0,265 \in I$ donc au seuil de confiance de 95%, on accepte l'affirmation du fournisseur d'accès.

2.3 Estimation

Propriété et définition :

Soit p la proportion inconnue d'apparition d'un caractère. On appelle f la fréquence d'apparition du caractère sur un échantillon de taille n. Alors, L'intervalle

$$[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}]$$

contient pour n assez grand la proportion p avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95. L'intervalle $[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}]$ est appelé *intervalle de confiance* au niveau de confiance 0,95.

Remarque :
Un intervalle de confiance au niveau de 95% a une amplitude de $\frac{2}{\sqrt{n}}$. L'amplitude diminue lorsque la taille n de l'échantillon augmente.

Exemple :
Un candidat à une élection municipale fait effectuer un sondage. Sur 100 personnes de la ville interrogées, 63 déclarent vouloir voter pour lui.

$I = [0,63 - \frac{1}{\sqrt{n}}; 0,63 + \frac{1}{\sqrt{n}}] = [0,53; 0,73]$

On peut donc estimer que la proportion de personnes dans la ville voulant voter pour lui est comprise dans l'intervalle $I = [0,53; 0,73]$.