# Taux d'évolution, TSTMG

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

8 juillet 2015

1. Évolutions
   - De la valeur initiale à la valeur finale
   - Trouver le taux d'évolution
2. Évolutions successives
   - Taux global et coefficient multiplicateur global
   - Équations $x^n = a$
   - Application au calcul de taux moyens
3. Indices de base 100
4. Approximations de taux faibles

## Plan

**Propriété et définition :**

Si une quantité évolue à partir d'une valeur $y_1$ de départ d'un taux $t$ (augmentation si $t > 0$, diminution si $t < 0$), alors la valeur finale $y_2$ est :

$$\dots$$

$1 + t$ est appelé le *coefficient multiplicateur* associé à la hausse ou à la baisse.

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] y1 \arrow[r, shift left, "\text{multiplication par } 1+t"] & y2 \arrow[l, shift left, "\text{multiplication par } 1/(1+t)"] \end{tikzcd}$$

**Propriété et définition :**

On appelle *coefficient multiplicateur réciproque* le coefficient multiplicateur permettant de passer de $y_2$ à $y_1$. Il vaut :

$$\dots$$

Le taux d'évolution associé est ................ et est appelé *taux d'évolution réciproque*.

**Preuve :**

$\ldots = \ldots$

$\ldots = \ldots$

$\ldots = \ldots.$

**Exemple :**

Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.

....

Il y a un an le litre de gasoil valait ..........

## Plan

1. Évolutions
   - De la valeur initiale à la valeur finale
   - Trouver le taux d'évolution
2. Évolutions successives
   - Taux global et coefficient multiplicateur global
   - Équations $x^n = a$
   - Application au calcul de taux moyens
3. Indices de base 100
4. Approximations de taux faibles

## Propriété :

Si une quantité varie d'une valeur initiale $y_1$ à une valeur finale $y_2$ alors le taux d'évolution est :

$$\ldots$$

## Preuve :

$$\ldots = \ldots$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\ldots = \ldots$$

$$\ldots = \ldots$$

**Exemple :**

Le cours de l'action d'une entreprise gérant un réseau social est passé de 38 dollars à son introduction en bourse à à 26,25 dollars le 18 mai 2013.
$\dfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots} \times 100 \approx$.......... .
Le prix de l'action a donc baissé de .......... %.

**Remarque :**
Dans l'exemple précédent, le coefficient multiplicateur est $\frac{4784}{5327} \approx 0,898$.
Le coefficient multiplicateur réciproque est ........................
d'où un taux réciproque de ................. soit .................
Cela signifie qu'une augmentation de 4784 points à 5327 points aurait été de ............ pas de .................

## Plan

**Propriété et définition :**

Si une quantité subit $n$ évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux $t_1$, $t_2$, …, $t_n$ à partir d'une valeur initiale $y_1$, alors la quantité finale est :

…

## Propriété et définition :

Le *coefficient multiplicateur global* est :

$$\ldots\ldots$$

ou

$$\ldots\ldots$$

Le *taux d'évolution global* est :

$$\ldots\ldots$$

ou

$$\ldots$$

**Exemple :**

La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.

...

Le coefficient multiplicateur global est donc ..................

Le taux global d'évolution est ....................... soit une baisse de ...............

Attention : ce n'est pas la somme des taux successifs : ...............................

## Plan

1. Évolutions
   - De la valeur initiale à la valeur finale
   - Trouver le taux d'évolution
2. Évolutions successives
   - Taux global et coefficient multiplicateur global
   - Équations $x^n = a$
   - Application au calcul de taux moyens
3. Indices de base 100
4. Approximations de taux faibles

**Propriété :**

Soient $a$ un nombre réel strictement positif et $n$ un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre ...................... appelé ........... ........... du nombre $a$.

**Exemple :**
$x^3 = 64$ si et seulement si $x =$ ........... c'est à dire $x =$ ......

## Plan

## Propriété et définition :

On considère une quantité qui subit $n$ évolutions successives de taux $t_1$, $t_2$, ..., $t_n$, et donc de taux global $t =$ ..........................

On appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre donné par :

................

ou

................

## Propriété et définition :

On appelle *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre donné par :

................

ou

................

C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des $n$ évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux $t_1$, $t_2$, etc. successivement appliqués.

**Exemples :**

- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %.
$(1+\frac{....}{100})(1-\frac{....}{100}))^{........} = 0,714^{......} \approx$ ......... En outre, ....... $-\ 1 =$ ......... soit **................** de baisse annuelle en moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit $t$ le taux moyen de l'augmentation. On a $(1+t)^{....} =$ ........ donc $1+t = 1,6^{.........}$ donc $t = 1,6^{........} - 1$ d'où $t \approx$ ....... c'est à dire **.........** % d'augmentation par an en moyenne.

**Définition :**

On appelle *indice* $i$ de base 100 d'une quantité $y_2$ par rapport à une quantité $y_2$, le nombre :

$$\ldots$$

**Exemple :**

On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007.

...

L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc ...........

**Propriété :**

Soit $t$ le taux d'évolution d'une quantité $y_1$ à une quantité $y_2$. On suppose que l'on connaît l'indice $i$ de $y_2$ par rapport à $y_1$. Alors

...

**Preuve :**
On a $i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$ par définition donc $\frac{y_2}{y_1} = \frac{i}{100}$. D'autre part, $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ par définition. Par conséquent,

$$\begin{aligned} t &= \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1}{y_1} \\ &= \frac{y_2}{y_1} - 1 \\ &= \frac{i}{100} - 1 \end{aligned}$$

**Exemples :**
On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004.

- Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'augmentation entre 2004 et 2005 a été de :

  ...
- Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est :

  ...

**Propriété :**

Le taux d'évolution entre deux quantités est égal au taux d'évolution
...

**Preuve :**

Soient $y$ la quantité de référence pour le calcul des indices, $y_1$ et $y_2$ les deux quantités, $i_1$ et $i_2$ les indices correspondants.
Le taux d'évolution entre les quantités $y_1$ et $y_2$ est donné par :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

Or $i_1 = \frac{y_1}{y} \times 100$ donc $y_1 = \frac{y \times i_1}{100}$ et de même $y_2 = \frac{y \times i_2}{100}$. Donc $t = \frac{\frac{y \times i_2}{100} - \frac{y \times i_1}{100}}{\frac{y \times i_1}{100}}$ ce qui donne par simplification $t = \frac{y \times i_2 - y \times i_1}{y \times i_1}$ donc $t = \frac{i_2 - i_1}{i_1}$.

**Exemple :**
On étudie le chiffre d'affaires d'une entreprise sur plusieurs années :

| Année | 2001 | 2002 | 2003 |
|---|---|---|---|
| Chiffre d'affaires | 2500 | 2875 | 3125 |
| Indice | 100 | .... | .... |

L'indice du chiffre d'affaires de 2002 par rapport à 2001 est :
...
Celui de 2003 par rapport à 2001 est :
...
Le taux d'évolution entre 2002 et 2003 est :
...
soit environ ..............

**Remarque :**

- Pour $t$ « proche » de 0, $\frac{1}{1+t} \approx 1 - t$ : le taux réciproque d’une évolution pour un taux $t$ voisin de 0 est approximativement de ..... mais ........... ............ .
- Pour $t$ « proche » de 0, $(1+t)^n \approx 1 + nt$ pour tout entier naturel $n$ : le taux moyen correspondant à $n$ évolutions successives est donc d’environ .... mais ............. ........... .

**Exemple :**

- Un prix subit une augmentation de 0,2 %. Le prix après augmentation est alors de 70 €.
  Calcul du prix initial :
  ...
  soit environ 69,86027.
  Calcul du prix initial approché à l'aide de la propriété énoncée :
  ...
  soit exactement 69,86.
  Il y a donc une différence mais compte tenu de la situation elle est négligeable.

**Exemple :**

- Par contre, supposons que l'augmentation est maintenant de 2 %. Calcul du prix initial :
  ...
  soit environ 68,63.
  Calcul du prix initial approché à l'aide de la propriété énoncée :
  ...
  soit environ 68,60.
  La différence n'est plus négligeable.