

Taux d'évolutions, cours de Terminale STMG

1 Évolutions

1.1 De la valeur initiale à la valeur finale

Propriété et définition :

Si une quantité évolue à partir d'une valeur y_1 de départ d'un taux t (augmentation si $t > 0$, diminution si $t < 0$), alors la valeur finale y_2 est :

...

$1 + t$ est appelé le *coefficient multiplicateur* associé à la hausse ou à la baisse.

$$y_1 \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{multiplication par } 1+t} \\ \xleftarrow{\text{multiplication par } 1/(1+t)} \end{array} y_2$$

1.2 Trouver le taux d'évolution

Propriété :

Si une quantité varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 alors le taux d'évolution est :

...

Preuve :

$$y_2 = \dots\dots y_1$$

$$y_2 = \dots\dots$$

$$y_2 - y_1 = \dots\dots$$

$$t = \dots\dots$$

Exemple :

Le cours de l'action d'une entreprise gérant un réseau social est passé de 38 dollars à son introduction en bourse à 26,25 dollars le 18 mai 2013.

$$\frac{26,25}{38} \times 100 \approx \dots\dots$$

Le prix de l'action a donc baissé de 30,93%.

1.3 Le coefficient multiplicateur réciproque**Définition :**

On appelle *coefficient multiplicateur réciproque* le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1 . Il vaut :

...

Le taux d'évolution associé est appelé *taux d'évolution réciproque*, il donne le taux d'évolution de y_2 à y_1 .

Exemple :

Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.

....

Il y a un an le litre de gasoil valait

Remarque :

Pour t « proche » de 0, $\frac{1}{1+t} \approx 1 - t$.

Le taux réciproque d'une évolution pour un taux t voisin de 0 est donc approximativement de

...

Exemple :

- Un prix subit une augmentation de 0,2 %. Le prix après augmentation est alors de 70 €.

Calcul du prix initial :

...

soit 69,86027 euros.

Calcul du prix initial approché à l'aide de la propriété énoncée :

...

soit 69,86 euros .

Il y a donc une différence mais compte tenu de la situation elle est négligeable.

- Par contre, supposons que l'augmentation est maintenant de 2 %. Calcul du prix initial :

...

soit 68,63 euros.

Calcul du prix initial approché à l'aide de la propriété énoncée :

...

soit 68,60 euros.

La différence n'est plus négligeable.

2 Évolutions successives

2.1 Taux global et coefficient multiplicateur global

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, \dots, t_n à partir d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_n , alors la quantité finale est :

...

Le *coefficient multiplicateur global* est donné par :

.....

ou par :

.....

Le *taux d'évolution global* est donné par :

.....

ou par :

.....

Exemple :

- La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.

...

Le coefficient multiplicateur global est donc

Le taux global d'évolution est soit une baisse de

Attention : ce n'est pas la somme des taux successifs :

- Si la population de la ville était de 16 000 habitants en 2010 et de 18 000 habitants en 2012, alors le taux global d'évolution entre ces deux années est soit 12,5% d'augmentation.

2.2 Taux moyen

2.2.1 Équations $x^n = a$

Propriété :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre appelé du nombre a .

Exemple :

$x^3 = 64$ si et seulement si $x = \dots\dots\dots$ c'est à dire $x = \dots\dots$

2.2.2 Application au calcul de taux moyen

Propriété et définition :

On considère une quantité qui subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, \dots, t_n , et donc de taux global $t = \dots\dots\dots$
 On appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre donné par :

 ou

 On appelle *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre donné par :

 ou

 C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2 , etc. successivement appliqués.

Exemples :

- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %. $(1 + \frac{2}{100})(1 - \frac{30}{100}) \dots\dots\dots = 0,714 \dots\dots \approx \dots\dots$
 En outre, $\dots\dots - 1 = \dots\dots$
 soit de baisse annuelle en moyenne.

- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation. On a $(1 + t)^4 = \dots\dots\dots$
donc $1 + t = \sqrt[4]{1,6}$ donc $t = \sqrt[4]{1,6} - 1$
d'où $t \approx \dots\dots\dots$ c'est à dire $\dots\dots\dots$ % d'augmentation par an en moyenne.

3 Indices de base 100

Définition :

On appelle *indice* i de base 100 d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 , le nombre :

...

Exemple :

On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007.

...

L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc

Propriété :

Soit t le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2 . On suppose que l'on connaît l'indice i de y_2 par rapport à y_1 . Alors

...

Preuve :

On a $i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$ par définition donc $\frac{y_2}{y_1} = \frac{i}{100}$. D'autre part, $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ par définition. Par conséquent, $t = \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1}{y_1}$ donc $t = \frac{y_2}{y_1} - 1$ et $t = \frac{i}{100} - 1$

Exemples :

On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004.

- Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'augmentation entre 2004 et 2005 a été de :

...

- Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est :

...

Propriété :

Le taux d'évolution entre deux quantités est égal au taux d'évolution
...

Exemple :

On étudie le chiffre d'affaires d'une entreprise sur plusieurs années :

Année	2001	2002	2003
Chiffre d'affaires	2500	2875	3125
Indice	100

L'indice du chiffre d'affaires de 2002 par rapport à 2001 est :

...

Celui de 2003 par rapport à 2001 est :

...

Le taux d'évolution entre 2002 et 2003 est :

...

soit environ