Taux d'évolutions, classe de terminale STMG

F.Gaudon

8 juillet 2015

Table des matières

1 Évolutions

Propriété et définition :

Si une quantité évolue à partir d'une valeur y_1 de départ d'un taux t (augmentation si $t > 0$, diminution si $t < 0$), alors la valeur finale y_2 est :

$$y_2 = (1+t)y_1$$

$1+t$ est appelé le *coefficient multiplicateur* associé à la hausse ou à la baisse.

$$\text{y1} \underset{\text{multiplication par 1/(1+t)}}{\overset{\text{multiplication par 1+t}}{\rightleftarrows}} \text{y2}$$

Propriété :

Si une quantité varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 alors le taux d'évolution est :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} y_2 &= (1+t)y_1 \\ y_2 &= y_1 + ty_1 \\ y_2 - y_1 &= ty_1 \\ t &= \frac{y_2 - y_1}{y_1} \end{aligned}$$

Preuve

Exemple :

Le cours de l'action d'une entreprise gérant un réseau social est passé de 38 dollars à son introduction en bourse à à 26,25 dollars le 18 mai 2013.

$\frac{26{,}25-38}{38} \times 100 \approx -30,93$.

Le prix de l'action a donc baissé de 30,93%.

Propriété et définition :

Le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1 est $\frac{1}{1+t}$. Le taux d'évolution associé est $\frac{1}{1+t} - 1$ et est appelé *taux réciproque*.

Preuve :

$$\begin{aligned} y_2 &= (1+t)y_1 \\ y_1 &= \frac{y_2}{1+t} \\ y_1 &= \frac{1}{1+t}y_2 \end{aligned}$$

Exemple :
Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.

$1,07 \div (1+\frac{20}{100}) \approx 0,89$. Il y a un an le litre de gasoil valait 0,89€.

Exemple :
Dans l'exemple du cours de bourse précédent, le coefficient multiplicateur est $\frac{4784}{5327} \approx 0,898$. Le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{5327}{4784} \approx 1,114$ d'où un taux réciproque de 0,114 soit 11,4% ce qui signifie qu'une augmentation de 4784 points à 5327 points aurait été de 11,4%, pas de 10,2%.

Remarque :
Pour t « proche » de 0, $\frac{1}{1+t} \approx 1-t$: le taux réciproque d'une évolution pour un taux t voisin de 0 est approximativement de $-t$ mais ne lui est pas égal.

Exemple :
Un prix subit une augmentation de 0,2 %. Les prix après augmentation est alors de 70 €. On a $70 \div (1+\frac{0,2}{100}) \approx 69,86027$ ou $70 \times \frac{1}{1+\frac{0,2}{100}} \approx 69,86027$ mais $70 \times (1-\frac{0,2}{100}) = 69,86$. Il y a donc une différence mais compte tenu de la situation elle est négligeable.

Par contre, si l'augmentation est de 2 %, on a $70 \times \frac{1}{1+\frac{0,2}{100}} \approx 68,63$ mais $70 \times (1-\frac{2}{100}) \approx 68,60$. La différence n'est plus négligeable.

2 Évolutions successives

2.1 Taux global

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, ..., t_n à partir d'une valeur initiale y_1, alors la quantité finale est :

$$y_n = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)y_1$$

Le *coefficient multiplicateur global* est :

$$\frac{y_n}{/}y_1$$

ou

$$(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$$

Le *taux d'évolution global* est :

$$\frac{y_n - y_1}{y_1}$$

ou

$$(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n) - 1$$

Exemples :

- La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.

$$(1+\frac{2,3}{100})(1-\frac{3,4}{100})^2 \approx 0,9546$$

  Le coefficient multiplicateur global est 0,9546 soit un taux global d'évolution de $0,9546 - 1 = -0,0453$ soit une baisse de 4,53% (remarque : ce n'est pas la somme des taux successifs : $2,3-3,4-3,4 = -4,5$).
- Si la population de la ville était de 16 000 habitants en 2010 et de 18 000 habitants en 2012, alors le taux global d'évolution entre ces deux années est $\frac{18000-16000}{16000} = 0,125$ soit 12,5% d'augmentation.

2.2 Taux moyen

2.2.1 Équations $x^n = a$

Propriété :

Soient a un nombre réel strictement positif et n un entier naturel. L'équation $x^n = a$ admet une unique solution dans $[0; +\infty[$, le nombre $a^{\frac{1}{n}}$ appelé racine n-ième du nombre a.

Preuve :
On a $x^n = a$ si et seulement $\ln(x^n) = \ln(a)$ c'est à dire $n\ln(x) = \ln(a)$ donc $\ln(x) = \frac{1}{n}\ln(a)$ d'où $x = a^{\frac{1}{n}}$ par définition de $a^{\frac{1}{n}}$.

Exemple :
$x^3 = 64$ si et seulement si $x = 64^{\frac{1}{3}}$ c'est à dire $x = 4$.

2.2.2 Application au calcul de taux moyens

Propriété et définition :

On considère une quantité qui subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, ..., t_n, et donc de taux global $t = (1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n) - 1$.
On appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre donné par :

$$((1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n))^{\frac{1}{n}}$$

ou

$$(1+t)^{\frac{1}{n}}$$

On appelle *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre donné par :

$$((1+t_1)(1+t_2)\ldots(1+t_n))^{\frac{1}{n}} - 1$$

ou

$$(1+t)^{\frac{1}{n}} - 1$$

C'est le taux d'évolution, qui, s'il avait été identique à chacune des n évolutions, aurait donné la même valeur finale que les différents taux t_1, t_2, etc. successivement appliqués.

Exemples :
- Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %. $(1+\frac{2}{100})(1-\frac{30}{100}))^{\frac{1}{2}} = 0,714^{\frac{1}{2}} \approx 0,8450$. En outre, $0,8450 - 1 = -0,1550$ soit 15,5 % de baisse annuelle en moyenne.
- Un produit a vu son prix multiplié par 1,6 en 4 ans. Soit t le taux moyen de l'augmentation. On a $(1+t)^4 = 1,6$ donc $1+t = 1,6^{\frac{1}{4}}$ donc $t = 1,6^{\frac{1}{4}} - 1$ d'où $t \approx 0,1247$ c'est à dire 12,47 % d'augmentation par an en moyenne.

3 Indices de base 100

Définition :

On appelle *indice* i d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_1 de base 100, le nombre :

$$i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$$

Exemple :

On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007. On a $\frac{18{,}2}{16} \times 100 = 113,75$. L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc 113,75.

Propriété :

Soit t le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2. On suppose que l'on connaît l'indice i de y_2 par rapport à y_1. Alors

$$t = \frac{i}{100} - 1$$

Preuve :

On a $i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$ par définition donc $\frac{y_2}{y_1} = \frac{i}{100}$. D'autre part, $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ par définition. Par conséquent, $t = \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1}{y_1}$ donc $t = \frac{y_2}{y_1} - 1$ d'où $t = \frac{i}{100} - 1$.

Exemple :

On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004. Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'augmentation a été de 5,3 %. Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est 109,7 %.