Primitives de fonctions, cours, Terminale STI

F.Gaudon

12 décembre 2010

Table des matières

1 Notion de fonctions primitives

Définition :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle *primitive* de la fonction f sur I toute fonction F définie et dérivable sur I et telle que pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Exemple :
$F : x \mapsto \frac{x^2}{2}$ est une primitive de $f : x \mapsto x$ car $F'(x) = x$ pour tout réel x.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Alors f admet une infinité de primitives : G est une primitve de f si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout réel x, $G(x) = F(x) + k$.

Exemple :
$F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - 4$ et $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + 2,5$ sont deux primitives de $x \mapsto x$.

Propriété :

Soit f une fonction admettant une primitive F sur un intervalle I. Soit a appartenant à I et b un réel. Alors il existe une et une seule primitive F telle que $F(a) = b$.

Exemple :
Il existe une unique primitive F de $x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(1) = 2$. En effet, on a vu que les primitives sont de la forme $x \mapsto x\frac{x^2}{2} + k$ où k est un réel. $F(1) = 2$ impose donc $\frac{1}{2} + k = 2$ d'où $k = \frac{3}{2}$.

2 Primitives de fonctions usuelles

Exemples fondamentaux :

f définie par	une primitive F
0	1
1	x
x	$\frac{x^2}{2}$
x^2	$\frac{x^3}{3}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$

3 Primitives de fonctions composées

Exemples fondamentaux :

f définie par	une primitive F
$u'u$	u^2
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$