Fonction Logarithme népérien, classe de terminale STI

1 Construction de la fonction logarithme népérien

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite aux XV^{e} et XVI^{e} siècles par Neper afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions (source : document d'accompagnement des programmes de terminale STG).

Propriété et définition :

> Il existe une unique fonction notée ln définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ dont la dérivée est .... et .... Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

2 Propriétés analytiques

2.1 Étude de la fonction

Propriété :

> ln est .... sur $]0;+\infty[$.

Preuve :
Découle du fait que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) =$ ......

Propriété :

> On a $\lim_{x\mapsto+\infty} \ln(x) =$ .... et $\lim_{x\mapsto 0^+} \ln(x) =$ ....
> La droite d'équation $x = 0$ est donc une .... à la courbe en 0.

2.2 Tableau de variation

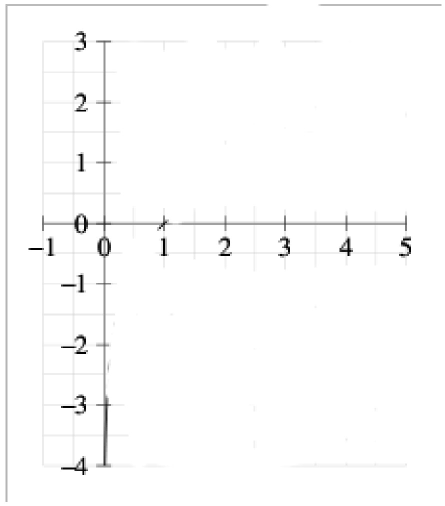
x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|\|$	......	
$\ln(x)$	$\|\|$		....
	$\|\|$	....	
	$\|\|$		

2.3 Tableau de signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln(x)$	$\|\|$	......	......	.....	

2.4 Représentation graphique

On parle de .... pour décrire une telle évolution.



2.5 Le nombre e

Propriété et définition :

> Il existe un unique réel dont le logarithme népérien vaut .... , on appelle e cet unique réel tel que .... On a $e \approx$ ....

Preuve :
Découle de l'hypothèse (forte) que ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

2.6 Dérivation de fonctions composées avec ln

Propriété :

> Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I, alors la fonction composée $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :
>
> $$(\ln(u))' = \ldots\ldots\ldots$$

3 Propriétés algébriques

Propriété :

> Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) =$.....................

Preuve :

Soit $a > 0$. On pose pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. Il s'agit de montrer que h est nulle h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $h'(x) = a\frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. h' est donc la fonction nulle d'où ses primitives sont constantes. h est donc constante. Comme $h(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$, h est donc la fonction nulle aussi. D'où pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$ on a $\ln(ax) =$ ....

Propriétés :

> Pour tous les réels a et b strictement positifs,
> - $\ln(\frac{a}{b}) =$................ ;
> - pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) =$.......... ;
> - $\ln(\sqrt{a}) =$.............. ;

Preuve :

- D'une part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) =$ ......
  D'autre part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) =$ ....
  Donc $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) =$ ......
  Enfin, $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = \ln(a) + \ln(\frac{1}{b}) =$.................... d'après ce qui précède.
- Découle directement du fait que $\ln(a^n) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \ldots + \ln(a)}_{n \text{ fois}}$.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2\ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

Exemples :

- $\ln(32) =$............. ;
- $\ln(1/10^8) =$............ .

4 Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien

4.1 Équations

Propriété :

> $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si ....

Preuve :

Découle de l'hypothèse (forte) que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et strictement croissante.

Exemples :

- $\ln(x-1)=0$
  Première étape : détermination de l'ensemble de définition.
  On a .... si et seulement si .... donc l'ensemble de définition est ....
  Deuxième étape : résolution de l'équation.
  On a $\ln(x-1)=0$ qui s'écrit $\ln(x-1)=$.......... ce qui équivaut à .... donc .... Comme .... est dans l'ensemble de définition, c'est donc l'unique solution de l'équation.
- $\ln(x-1)=2$
  Première étape : on a affaire au même ensemble de définition .... que dans l'exemple précédent.
  Deuxième étape : $\ln(x-1)=2$ s'écrit $\ln(x-1)=$........... ce qui équivaut à .... donc .... Comme .... appartient à l'ensemble de définition, c'est l'unique solution.

4.2 Inéquations

Propriété :

$\ln(a)\geq\ln(b)$ si et seulement si ....

Preuve :
Découle de l'hypothèse (forte) que ln est dérivable sur $]0;+\infty[$ et strictement croissante.

Exemple :
$\ln(2x-1)<5$
Première étape : détermination de l'ensemble de définition.
On a .... qui donne .... donc l'ensemble de définition est ....
Deuxième étape : résolution de l'inéquation.
$\ln(2x-1)<5$ s'écrit aussi .... c'est à dire .... ce qui équivaut à .... donc à .... Comme .... est dans l'ensemble de définition, c'est l'unique solution de l'inéquation.

4.3 Primitives de fonctions composées

Propriété :

Toute fonction dérivable de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitive .... sur tout intervalle où u ne s'annule pas.