

Fonction logarithme népérien, cours de Terminale STI

F.Gaudon

25 juillet 2010

Table des matières

1	Construction de la fonction logarithme népérien	2
2	Propriétés analytiques	2
2.1	Étude de la fonction	2
2.2	Tableau de variation	3
2.3	Tableau de signe	3
2.4	Représentation graphique	3
2.5	Le nombre e	3
2.6	Dérivation de fonctions composées avec \ln	3
3	Propriétés algébriques	4
4	Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien	4
4.1	Équations	4
4.2	Inéquations	5
4.3	Primitives de fonctions composées	5

1 Construction de la fonction logarithme népérien

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite aux XV^e et XVI^e siècles par Neper afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions (source : document d'accompagnement des programmes de terminale STG).

On cherche une fonction donc une fonction f qui vérifie $f(ax) = f(a) + f(x)$ pour tous les réels strictement positifs a et x .

Propriété :

Soit f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant : pour tous réels a et x strictement positifs, $f(ax) = f(a) + f(x)$, alors $f'(x) = \frac{k}{x}$ où k est un nombre réel.

Preuve :

On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction f existe. Alors $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$. D'autre part, soit $a > 0$, pour tous les réels $x > 0$, on a $f(ax) = f(a) + f(x)$ d'où en dérivant $af'(ax) = f'(x)$ et pour $x = 1$ on obtient $af'(a) = f'(1)$ donc $f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$. D'où pour tous les réels $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Choisissons $f'(1) = k$ où k est un réel quelconque puisqu'aucune contrainte ne semble fixer $f'(1)$. On a donc $f'(x) = \frac{k}{x}$ pour tout réel $x > 0$.

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction notée \ln définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée est $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$. Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

2 Propriétés analytiques

2.1 Étude de la fonction

Propriété :

\ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

Découle du fait que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Propriété :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.
La droite d'équation $x = 0$ est donc une asymptote verticale à la courbe en 0.

2.2 Tableau de variation

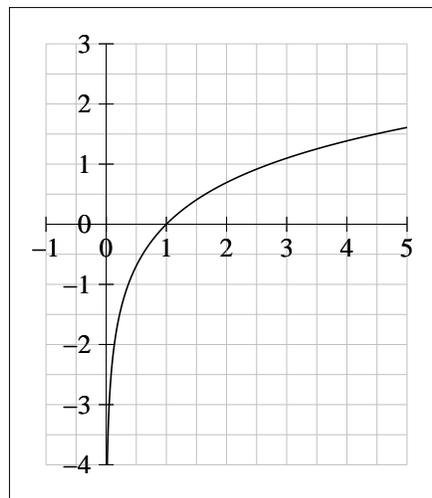
x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln(x)$		$+\infty$
		$-\infty$
		↗

2.3 Tableau de signe

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		-	0
			+

2.4 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



2.5 Le nombre e

Propriété et définition :

Il existe un unique réel dont le logarithme népérien vaut 1, on appelle e cet unique réel tel que $\ln(e) = 1$. On a $e \approx 2,72$.

Preuve :

Découle de l'hypothèse (forte) que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

2.6 Dérivation de fonctions composées avec \ln

Propriété :

Si u est une fonction strictement positive et dérivable sur un intervalle I , alors la fonction composée $\ln(u)$ est définie et dérivable sur I et on a :

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

3 Propriétés algébriques

Propriété :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :

Soit $a > 0$. On pose pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. Il s'agit de montrer que h est nulle h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $h'(x) = a \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. h' est donc la fonction nulle d'où ses primitives sont constantes. h est donc constante. Comme $h(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$, h est donc la fonction nulle aussi. D'où pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$ on a $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- pour tout entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln a$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$;

Preuve :

- D'une part, $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$.
D'autre part, $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$
Donc $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$.
Enfin, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après ce qui précède.
- Découle directement du fait que $\ln(a^n) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \dots + \ln(a)}_{n \text{ fois}}$.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

Exemples :

- $\ln(32) = \ln(2^5) = 5 \ln(2)$;
- $\ln(1/10^8) = -8 \ln(10)$.

4 Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien

4.1 Équations

Propriété :

$\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$.

Preuve :

Découle de l'hypothèse (forte) que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

Exemples :

- $\ln(x - 1) = 0$

Première étape : détermination de l'ensemble de définition.

On a $x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$ donc l'ensemble de définition est $]1; +\infty[$. Deuxième étape : résolution de l'équation.

On a $\ln(x - 1) = 0$ qui s'écrit $\ln(x - 1) = \ln(1)$ ce qui équivaut à $x - 1 = 1$ donc $x = 2$. Comme 2 est dans l'ensemble de définition, c'est donc l'unique solution de l'équation.

- $\ln(x - 1) = 2$

Première étape : on a affaire au même ensemble de définition $]1; +\infty[$ que dans l'exemple précédent.

Deuxième étape : $\ln(x - 1) = 2$ s'écrit $\ln(x - 1) = \ln(e^2)$ ce qui équivaut à $x - 1 = e^2$ donc $x = 1 + e^2$. Comme $1 + e^2$ appartient à l'ensemble de définition, c'est l'unique solution.

4.2 Inéquations

Propriété :

$$\ln(a) \geq \ln(b) \text{ si et seulement si } a \geq b.$$

Preuve :

Découle de l'hypothèse (forte) que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

Exemple :

$$\ln(2x - 1) < 5$$

Première étape : détermination de l'ensemble de définition.

On a $2x - 1 > 0$ qui donne $x > \frac{1}{2}$ donc l'ensemble de définition est $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Deuxième étape : résolution de l'inéquation.

$\ln(2x - 1) < 5$ s'écrit aussi $\ln(2x - 1) < 5 \ln(e)$ c'est à dire $\ln(2x - 1) < \ln(e^5)$ ce qui équivaut à $2x - 1 < e^5$ donc à $x < \frac{e^5 + 1}{2}$. Comme $\frac{e^5 + 1}{2}$ est dans l'ensemble de définition, c'est l'unique solution de l'inéquation.

4.3 Primitives de fonctions composées

Propriété :

Toute fonction dérivable de la forme $\frac{u'}{u}$ a pour primitive $\ln|u|$ sur tout intervalle où u ne s'annule pas.