

Limites de fonctions, classe de terminale STI

1 Limites finies à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

Soit l un réel. On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches que l'on veut de l à condition de prendre les valeurs de x suffisamment grandes (resp. suffisamment petites). On note alors $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$ (resp. $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$).
On dit aussi que $f(x) \dots l$ quand x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Propriété :

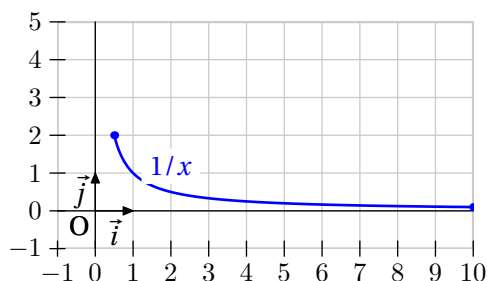
- Pour tout entier naturel k non nul $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^k} = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^k} = \dots$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \dots$;
- Pour tout entier naturel non nul k , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-k} = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-k} = \dots$

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit \mathcal{C} la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $y = l$ est à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

Exemples :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \dots$ donc la droite d'équation est à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$.



2 Limites infinies à l'infini

Définition :

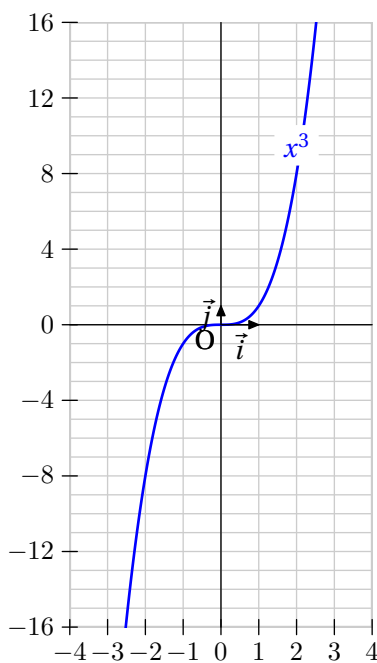
f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. en $-\infty$ en $+\infty$) si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi grandes que l'on veut (aussi petites que l'on veut) à condition de prendre les valeurs de x suffisamment grandes.
 On note alors $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$ (resp. $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$).
 On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :

On définit de même les limites en $-\infty$.

Propriétés :

- Pour tout entier naturel k non nul, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^k = \dots$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = \dots$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = \dots$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \dots$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = \dots$



Définition :

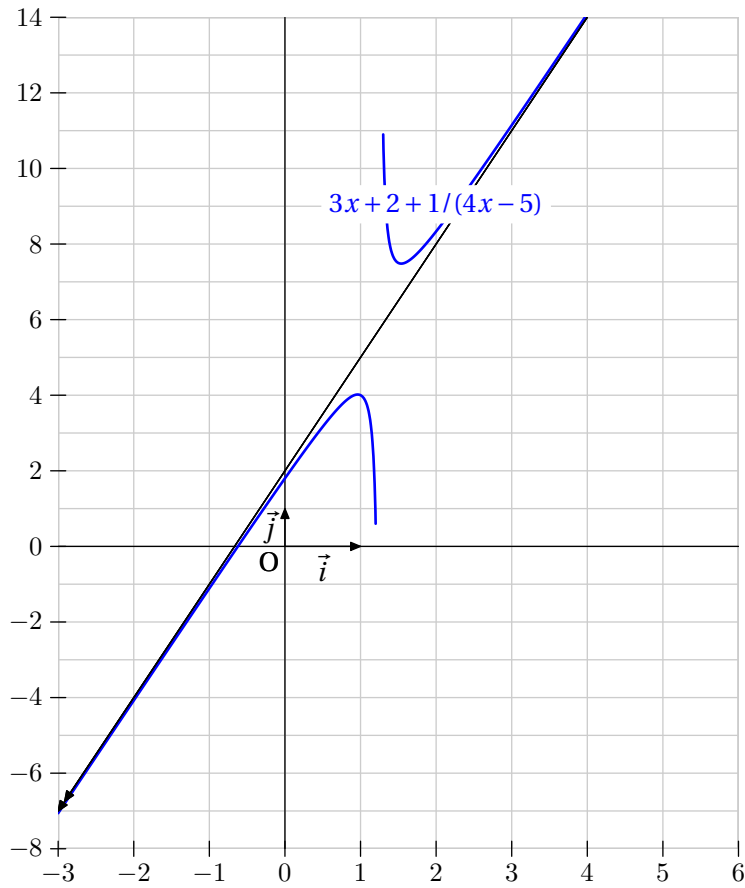
Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. \mathcal{C} est la courbe représentant une fonction f dans un repère.
 La droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

.....

.....

Exemple :

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$ par $f(x) = 3x + 2 + \frac{1}{4x-5}$ et soit \mathcal{D} la droite d'équation $y = 3x + 2$. On a $f(x) - (3x + 2) = \dots\dots\dots$ pour tout réel $x \neq \mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$ et $\dots\dots\dots$ donc \mathcal{D} est une asymptote oblique à \mathcal{C}_f en $+\infty$ (même démonstration en $-\infty$).



3 Opérations sur les limites à l'infini

3.1 Addition

c désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow c} (f + g)(x)$

Exemple :

$f(x) = x^2 + 3x$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \dots\dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = \dots\dots\dots$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$
 Pour $g(x) = x^2 - 3x$ en $+\infty$ on ne peut pas conclure en utilisant les règles précédentes.

3.2 Multiplication

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}^*$	$+/- \infty$	0
$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+/- \infty$	$+/- \infty$	$+/- \infty$
$\lim_{x \rightarrow c} (fg)(x)$

Exemple :

$g(x) = x^2 - 3x$. On a pour tout réel x , $g(x) = x(x - 3)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \dots\dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x - 3 = \dots\dots\dots$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \dots\dots\dots$

3.3 Inverse

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+/- \infty$
$\lim_{x \rightarrow c} \frac{1}{f(x)}$

3.4 Quotient

$\lim_{x \rightarrow c} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	0	$+/- \infty$	$+/- \infty$	$+/- \infty$
$\lim_{x \rightarrow c} g(x)$	$l' \neq 0$	$+/- \infty$	0	0	0	$l' \neq 0$	$+/- \infty$
$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Exemple :

$f(x) = \frac{3}{4x+5}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3 = \dots\dots\dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} 4x + 5 = \dots\dots\dots$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \dots\dots\dots$
 Pour $g(x) = \frac{3x^2+2}{4x+1}$ en $+\infty$, on ne peut pas conclure en utilisant les règles précédentes.



3.5 Cas des limites à l'infini des fonctions polynômes ou rationnelles

Propriété :

Soit f une fonction polynôme définie par $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ pour tout réel x avec $a_n \neq 0$ et n entier. Alors sa limite en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) est celle de

Preuve :

On le montre pour x tendant vers $+\infty$, la démonstration restant la même pour x tendant vers $-\infty$. On écrit $f(x) = x^n(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n)$. On constate que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} = 0$, ..., $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = 0$. Comme $a_n \neq 0$ et que x^n tend vers $+\infty$, la limite en $+\infty$ est bien donnée par la limite de a_nx^n .

Propriété :

En $+\infty$ et en $-\infty$, la limite de la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0}{b_px^p + b_{p-1}x^{p-1} + \dots + b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ est donnée par la limite de

Preuve :

On écrit $f(x) = \frac{x^n}{x^p} \frac{a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \dots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + a_0}{b_p + \frac{b_{p-1}}{x} + \dots + \frac{b_1}{x} + b_0}$ et on raisonne comme dans la démonstration précédente.

Preuve :

$g(x) = \frac{3x^2+2}{x+1}$: g a la même limite que donc a pour limite en

4 Limites en un réel

On considère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble D_f et a est l'extrémité d'un intervalle de D_f .

Définition :

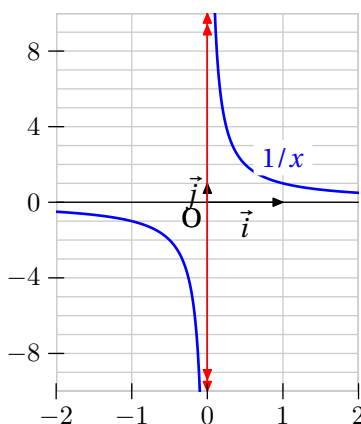
- f admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de l (resp. aussi grandes) que l'on veut à condition de prendre les valeurs de x suffisamment proches de a .
On note alors $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$ (resp. $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots$).
- f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de l (resp. aussi grandes) que l'on veut à condition de prendre les valeurs de x
.....
On note alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$).
- f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de l (resp. aussi grandes) que l'on veut à condition de prendre les valeurs de x
.....
On note alors $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$).



Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \dots$$



Définition :

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On suppose que $a \in D_f$ mais que a est une extrémité de D_f . On dit que la droite d'équation $x = a$ est à \mathcal{C} si la limite ou la limite à droite ou à gauche de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété :

Soit f une fonction telle que $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont deux autres fonctions. Si g a une limite (ou une limite à droite ou à gauche) non nulle et h tend vers 0 en un réel a , alors f tend vers l'infini, le signe restant à déterminer.

Exemple :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} x - 1 = \dots \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x + 1 = 2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^-} x - 1 = \dots \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-1} = \dots$$

D'où la droite d'équation $x = 1$ est à la courbe \mathcal{C} .

Propriété :

Les opérations sur les limites à l'infini sont valables pour les limites en un réel, on se référera donc au paragraphe « Opérations sur les limites à l'infini ».

5 Limites de fonctions composées

Propriété :

a, b et l désignent des réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. u et f sont deux fonctions.
 Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(X) = l$, alors

Exemple :

On considère la fonction h définie sur \mathcal{R} par $-\sqrt{3x^2 + 4}$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 + 4 = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} =$
 donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) =$

Preuve :

admise