Limites de fonctions, cours, terminale STI

F.Gaudon

17 octobre 2010

Table des matières

1 Limites finies à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Définition :

Soit l un réel. On dit que f admet pour limite l en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches que l'on veut de l à condition de prendre les valeurs de x suffisament grandes (resp. suffisament petites). On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$). On dit aussi que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$).

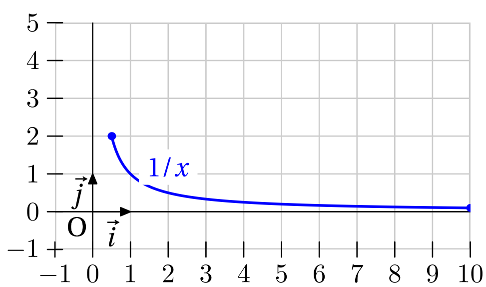
Propriété :

- Pour tout entier naturel k non nul, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^k} = 0$;
- $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$;
- Pour tout entier naturel non nul k, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-k} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-k} = 0$

Définition :

Soit $l \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
On dit que la droite d'équation $y = l$ est *asymptote horizontale* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$.

Exemples :
$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote à l'hyperbole en $+\infty$ et en $-\infty$.



2 Limites infinies à l'infini

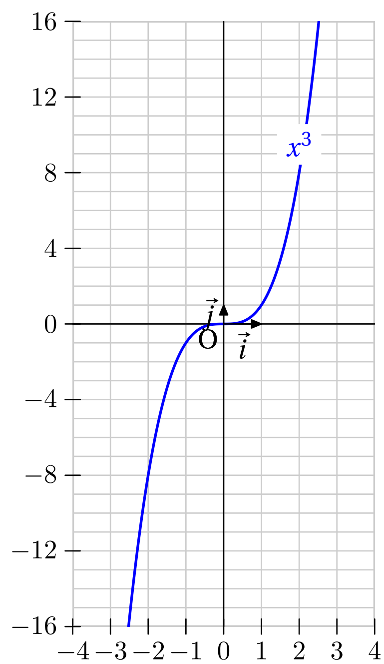
Définition :

f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$ en $+\infty$) si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi grandes que l'on veut (resp. aussi petites que l'on veut) à condition de prendre les valeurs de x suffisament grandes.
On note alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$).
On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. tend vers $-\infty$) quand x tend vers $+\infty$.

Remarque :
On définit de même les limites en $-\infty$.

Propriétés :

- Pour tout entier naturel k non nul,$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$;
- $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$;
- $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.



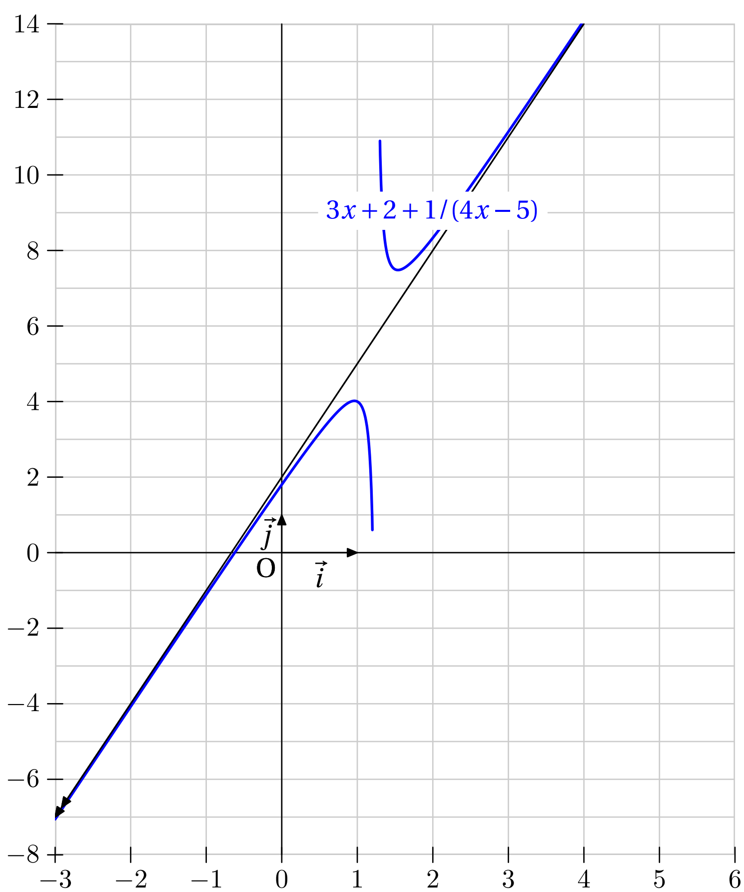
Définition :

Soient a et b deux réels avec $a \neq 0$. $\mathcal{C}$ est la courbe représentant une fonction f dans un repère.
La droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0$$

$$(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} (f(x) - (ax+b)) = 0)$$

Exemple :
Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$ par $f(x) = 3x + 2 + \frac{1}{4x-5}$ et soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = 3x + 2$. On a $f(x) - (3x + 2) = \frac{1}{4x-5}$ pour tout réel $x \neq \mathbb{R} - \{\frac{5}{4}\}$ et $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{4x-5} = 0$ donc $\mathcal{D}$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (même démonstration en $-\infty$).



3 Opérations sur les limites à l'infini

3.1 Addition

c désigne $+\infty$ ou $-\infty$.

$\lim_{x\to c} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x\to c} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x\to c}(f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	indéterminée

Exemple :
$f(x) = x^2 + 3x$. On a $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Pour $g(x) = x^2 - 3x$ en $+\infty$ on ne peut pas conclure en utilisant les règles précédentes.

3.2 Multiplication

$\lim_{x\to c} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}*$	$+/-\infty$	0
$\lim_{x\to c} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+/-\infty$	$+/-\infty$	$+/-\infty$
$\lim_{x\to c}(fg)(x)$	ll'	$+/-\infty$	$+/-\infty$	indéterminée

Exemple :
$g(x) = x^2 - 3x$. On a pour tout réel x, $g(x) = x(x-3)$. Or $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x - 3 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

3.3 Inverse

$\lim_{x\to c} f(x)$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+/-\infty$
$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

3.4 Quotient

$\lim_{x\to c} f(x)$	l	l	$l \neq 0$	0	$+/-\infty$	$+/-\infty$	$+/-\infty$
$\lim_{x\to c} g(x)$	$l' \neq 0$	$+/-\infty$	0	0	0	$l' \neq 0$	$+/-\infty$
$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{l}{l'}$	0	$+/-\infty$	indéterminée	$+/-\infty$	$+/-\infty$	indéterminée

Exemple :
$f(x) = \frac{3}{4x+5}$. On a $\lim_{x\to+\infty} 3 = 3$ et $\lim_{x\to+\infty} 4x+5 = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Pour $g(x) = \frac{3x^2+2}{4x+1}$ en $+\infty$, on ne peut pas conclure en utilisant les règles précédentes.

3.5 Cas des limites à l'infini des fonctions polynômes ou rationnelles

Propriété :

> Soit f une fonction polynôme définie par $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ pour tout réel x avec $a_n \neq 0$ et n entier. Alors sa limite en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) est celle de son monôme de plus haut degré a_nx^n.

Preuve :
On le montre pour x tendant vers $+\infty$, la démonstration restant la même pour x tendant vers $-\infty$. On écrit $f(x) = x^n(\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x} + a_n)$. On constate que $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_1}{x^{n-1}} = 0$, ..., $\lim_{x\to+\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = 0$. Comme $a_n \neq 0$ et que x^n tend vers $+\infty$, la limite en $+\infty$ est bien donnée par la limite de a_nx^n.

Propriété :

> En $+\infty$ et en $-\infty$, la limite de la fonction rationnelle f définie par $f(x) = \frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{b_px^p+b_{p-1}x^{p-1}+\ldots+b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$ est donnée par la limite de $\frac{a_nx^n}{b_px^p}$.

Preuve :
On écrit $f(x) = \frac{x^n}{x^p}\frac{a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+a_0}{b_p+\frac{b_{p-1}}{x}+\ldots+\frac{b_1}{x}+b_0}$ et on raisonne comme dans la démonstration précédente.

Preuve :
$g(x) = \frac{3x^2+2}{x+1}$: g a la même limite que $x \mapsto \frac{3x^2}{x} = 3x$ donc a pour limite $+\infty$ et $+\infty$.

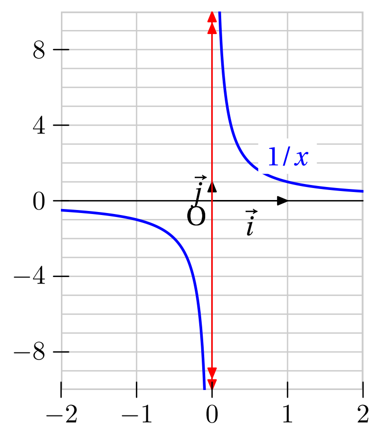
4 Limites en un réel

On considère dans ce paragraphe une fonction f définie sur un ensemble D_f et a est l'extrémité d'un intervalle de D_f.
Définition :

> - f admet pour limite $l\mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de l (resp. aussi grandes) que l'on veut à condition de prendre les valeurs de x suffisament proches de a.
>   On note alors $\lim_{x\to a} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$.
> - f admet pour limite à droite $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de l (resp. aussi grandes) que l'on veut à condition de prendre les valeurs de x supérieures à a suffisament proches de a.
>   On note alors $\lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x\to a\\>}} f(x) = +\infty$).
> - f admet pour limite à gauche $l \in \mathbb{R}$ (resp. $+\infty$) en a si les valeurs de $f(x)$ peuvent être rendues aussi proches de l (resp. aussi grandes) que l'on veut à condition de prendre les valeurs de x inférieures à a suffisament proches de a.
>   On note alors $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = l$ (resp. $\lim_{\substack{x\to a\\<}} f(x) = +\infty$).

Exemple :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$$
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{1}{x} = -\infty$$



Définition :

Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère. On suppose que $a \in D_f$ mais que a est une extrémité de D_f. On dit que la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* à $\mathcal{C}$ si la limite ou la limite à droite ou à gauche de f en a est $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriété :

Soit f une fonction telle que $f = \frac{g}{h}$ où g et h sont deux autres fonctions. Si g tend vers une limite non nulle et h tend vers 0 en un réel a, alors f tend vers l'infini, le signe restant à déterminer.

Exemple :

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x + 1 = 2$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} x - 1 = 0^+$ donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \frac{x+1}{x-1} = +\infty$.

$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x + 1 = 2$ et $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} x - 1 = 0^-$ donc $\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \frac{x+1}{x-1} = -\infty$

D'où la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}$.

Propriété :

Les opérations sur les limites à l'infini sont valables pour les limites en un réel, on se référera donc au paragraphe « Opérations sur les limites à l'infini ».

5 Limites de fonctions composées

Propriété :

a, b et l désignent des réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. u et f sont deux fonctions.
Si $\lim_{x\mapsto a} u(x) = b$ et $\lim_{x\mapsto b} f(X) = l$, alors $\lim_{x\mapsto a} f \circ u(x)) = l$.

Exemple :
On considère la fonction h définie sur $\mathcal{R}$ par $-\sqrt{3x^2+4}$. On a $\lim_{x\mapsto +\infty} 3x^2+4 = +\infty$ et $\lim_{X\mapsto +\infty} \sqrt{X} = -\infty$ donc $\lim_{x\mapsto +\infty} h(x) = -\infty$.

Preuve :
admise