Intégration, cours, classe de terminale STI

1 Définition et interprétation de l'intégrale

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On appelle *intégrale* de f sur $[a;b]$ et on note $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = \text{.......................}$$

Remarque :
La valeur de I ne dépend pas de la primitive choisie : en effet, si $G = F + k$ avec k réel est une autre primitve de f, on a $I =$.............. ....

Exemple :
$I = \int_0^1 (x+1)\,dx$. $F : x \mapsto$ .... est une primitive de $f : x \mapsto x + 1$.
Donc $I =$ ....

Propriété (interprétation géométrique) :

Soit f une fonction dérivable et positive sur une intervalle $[a;b]$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f sur $[a;b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la droite d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$. Alors

$$A = \text{.....................}$$

2 Propriétés de l'intégrale

Propriété (relation de Chasles) :

Soit f une fonction dérivable sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \text{...........................}$$

Preuve :

Soit F une primitive de f. On a

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \text{............................}$$
$$= \text{..................}$$
$$= \text{....................}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,

- $\int_a^a f(x)\,dx = \text{....}$
- $\int_b^a f(x)\,dx = \text{......................}$

Preuve :

D'une part, $\int_a^a f(x)\,dx =$ .... et d'autre part, $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx =$ .... d'où les deux résultats.

Propriété (linéarité de l'intégrale) :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel. Alors

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \text{............}$$

et

$$\int_a^b kf(x)\,dx = \text{...........}$$

Preuve :

Soient F et G des primitives de f et g respectivement. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)' = F' + G' = f + g$ et on a $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g()x\,dx$.

De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x)\,dx = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété (positivité de l'intégrale) :

Soient

- Si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$........... ;
- si pour tout réel x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx$......... $\int_a^b g(x)\,dx$.

Preuve :
Admise

Propriété (inégalité de la moyenne) :

Si f est dérivable sur $[a;b]$ et si m et M sont deux réels tels que pour tout x de $[a;b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$, alors : ....

Preuve :
D'après la propriété précédente, on a $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$
donc .... par linéarité.
Or $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ donc $\int_a^b \,dx =$ .... d'où le résultat.

Définition :

Pour toute fonction f dérivable sur un intervalle $[a;b]$, *la valeur moyenne* de f sur $[a;b]$ est le réel défini par : ....