Calcul intégral, cours, Terminale STI

F.Gaudon

14 avril 2011

Table des matières

1 Définition et interprétation de l'intégrale

Définition :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a;b]$. Soit F une primitive de f sur $[a;b]$. On appelle *intégrale* de f sur $[a;b]$ et on note $\int_a^b f(x)\,dx$ le nombre :

$$I = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Remarque :

La valeur de I ne dépend pas de la primitive choisie : en effet, si $G = F + k$ avec k réel est une autre primitve de f, on a $I = F(b) - f(a) = G(b) - k - (G(a) - k) = G(b) - k - G(a) + k = G(b) - G(a)$.

Exemple :

$I = \int_0^1 (x+1)\,dx$. $F : x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$ est une primitive de $f : x \mapsto x + 1$. Or $F(1) - F(0) = 2 - 1 = 1$ donc $I = 1$.

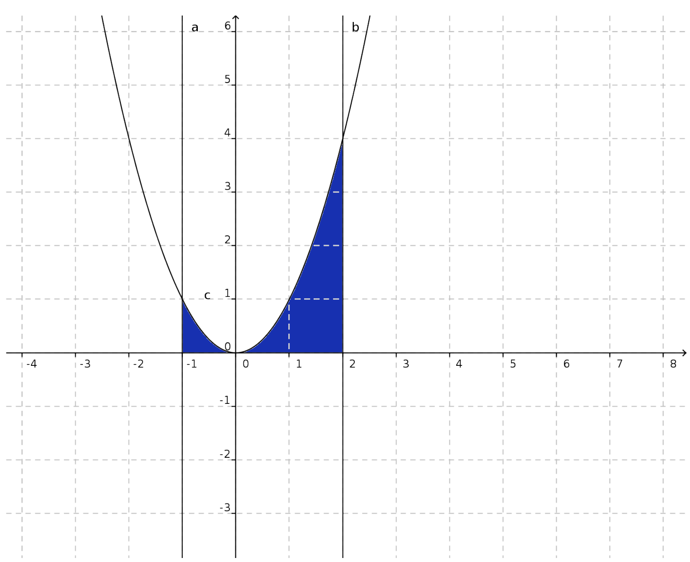
Propriété (interprétation géométrique) :

Soit f une fonction dérivable et positive sur un intervalle $[a;b]$ et soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f sur $[a;b]$. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la surface limitée par les droites d'équations $x = a$, $x = b$, la droite d'équation $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}$. Alors

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Exemple :

Soit f la fonction carrée. f est positive sur $[-1;2]$. Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie comprise entre l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 2$.
Alors $\mathcal{A} = \int_{-1}^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^2 x^2\,dx$.
Une primitive de f est F définie par $F(x) = x^3 3$.
On a $\mathcal{A} = F(2) - F(-1) = \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$.



2 Propriétés de l'intégrale

Propriété (relation de Chasles :

Soit f une fonction dérivable sur I et a, b et c trois réels de I. Alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Preuve :
Soit F une primitive de f. On a

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx &= F(b) - F(a) + F(c) - F(b)\\ &= F(c) - F(a)\\ &= \int_a^c f(x)\,dx\end{aligned}$$

Conséquences :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment,
- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

Preuve :
D'une part, $\int_a^a f(x)\,dx = F(a) - F(a) = 0$ et d'autre part, $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx$ d'où les deux résultats.

Propriété (linéarité de l'intégrale) :

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a;b]$ et k un réel.
Alors
$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$
et
$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Preuve :
Soient F et G des primitives de f et g respectivement. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ car $(F+G)' = F' + G' = f + g$ et on a $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(a) - G(a) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g()x\,dx$.

De même, kF est une primitive de kf et $\int_a^b kf(x)\,dx = kF(b) - kF(a) = k(F(b)-F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$

Propriété (positivité de l'intégrale) :

> Soients
> - Si pour tout réel x de I, $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$;
> - si pour tout réel x de $[a;b]$, $f(x) \leq g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

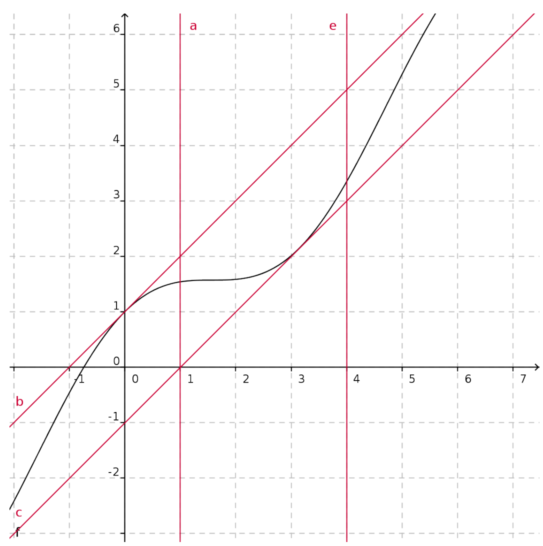
Preuve :
Admise

Propriété (inégalité de la moyenne) :

> Si f est dérivable sur $[a;b]$ et si m et M sont deux réels tels que pour tout x de $[a;b]$ on a $m \leq f(x) \leq M$, alors :
>
> $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

Preuve :
D'après la propriété précédente, on a $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$ donc $m\int_a^b dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M\int_a^b dx$ par linéarité. Or $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$ donc $\int_a^b dx = b-a$ d'où le résultat.

Exemple :

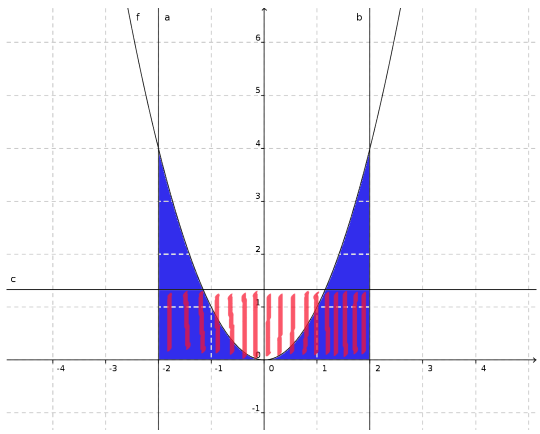


Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ pour tout réel x par $f(x) = x + \cos(x)$.
On a pour tout réel x, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ donc $x - 1 \leq f(x) \leq x + 1$.
D'où $\int_1^4 x-1\,dx \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq \int_1^4 x+1\,dx$
Or une primitive de $x \mapsto x-1$ est $F_1 : x \mapsto \frac{x^2}{2} - x$ et une primitive de $x \mapsto x+1$ est $F_2 : x \mapsto \frac{x^2}{2} + x$.
D'où $\int_1^4 x-1\,dx = F_1(4) - F_1(1) = \frac{4^2}{2} - 4 - (\frac{1^2}{2} - 1) = 8 - 4 - \frac{1}{2} + 1 = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$ $\int_1^4 x+1\,dx = F_2(4) - F_2(1) = \frac{4^2}{2} + 4 - (\frac{1^2}{2} + 1) = 8 + 4 - \frac{1}{2} - 1 = 11 - \frac{1}{2} = \frac{21}{2}$.
On peut donc dire que $4,5 \leq \int_1^4 f(x)\,dx \leq 10,5$, c'est à dire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 4$ est comprise entre 4,5 et 10,5 unités d'aire.

Définition :

> Pour toute fonction f dérivable sur un intervalle $[a;b]$, *la valeur moyenne* de f sur $[a;b]$ est le réel défini par :
> $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque :
Si f est positive sur $[a;b]$, la valeur moyenne s'interprète géométriquement comme la hauteur du rectangle de côté $b-a$ et de même aire que l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de la fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=a$ et $x=b$.



Exemple :
Soit f définie sur $\mathcal{R}$ par $f(x)=x^2$. La valeur moyenne c de f sur $[-2;2]$ est donnée par :
$c=\frac{1}{2-(-2)}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx=\frac{1}{4}\int_{-2}^{2} x^2\,dx$.
On a vu qu'une primitive est donnée par $F(x)=\frac{x^3}{3}$ donc la valeur moyenne est :
$c=\frac{1}{4}(F(2)-F(-2))=\frac{1}{4}(\frac{2^3}{3}-\frac{(-2)^3}{3})=\frac{1}{4}(\frac{8}{3}+\frac{8}{3})=\frac{1}{4}\frac{16}{3}=\frac{4}{3}$.