Fonction exponentielle, classe de terminale STI

1 Définitions

Propriété et définition :

On appelle *fonction exponentielle de base e* la fonction notée exp qui à tout réel x associe l'unique nombre y de $]0;+\infty[$ tel que $\ln(y)=x$.

Preuve :
La fonction ln est dérivable et strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;\infty[$ donc pour tout réel x, il existe bien un unique réel y tel que $\ln(y)=x$.

Notation :

On a vu lors du chapitre sur la fonction ln que pour tout entier relatif n, on a $\ln(e^n)=n$. Ceci signifie donc que $\exp(n)=e^n$ pour tout entier relatif n. On convient d'étendre cette notation à tout nombre réel x et on écrira donc pour tout réel x, $\exp(x)=e^x$.

2 Propriétés algébriques

Propriétés :

- Pour tout $y>0$ et tout x réel, $\exp(x)=y$ équivaut à $x=$ ..... ;
- pour tout x réel, $\ln(e^x)=$ .... ce qui s'écrit encore $\ln(\exp(x))=$ .... ;
- pour tout $y>0$, $e^{\ln(y)}=$ .... ou $\exp(\ln(y))=$ .... ;
- pour tout x et x' réels, $\exp(x)\exp(x')=$ .... ou $e^x e^{x'}=$ .... ;
- $\exp(a)=\exp(b)$ si et seulement si .... ;
- $\exp(a)<\exp(b)$ si et seulement si ....

Preuve :

- Traduction de la définition.
- Traduction de la définition avec $y=$ ....
- Traduction de la première propriété avec $x=$ ....
- On a $\ln(\exp(x)\exp(x'))=$............ .... d'après les propriétés de ln et $\ln(\exp(x))=$ ...., $\ln(exp(x'))=$ ..... d'après les propriétés précédentes donc $\ln(\exp(x)\exp(x'))=$ .... ce qui, par définition de l'exponentielle signifie que $\exp(x)\exp(x')=$...............
- $\exp(a)=\exp(b)$ si et seulement $\ln(\exp(a))=\ln(\exp(b))$ si et seulement si ....
- Même raisonnement que la propriété précédente.

Propriétés :

pour tout entier relatif n et pour tous les réels x et x' on a :
- $(e^x)^n = ...$;
- $\frac{1}{e^x} = ...$;
- $\frac{e^x}{e^{x'}} = ...$;

Preuve :
- $\ln((e^x)^n) = ... = ...$ donc $(e^x)^n = ...$;
- $\ln(\frac{1}{e^x}) = ... = ... = ...$ d'où le résultat ;
- $\frac{e^x}{e^{x'}} =$...................... et on utilise le résultat précédent.

3 Étude de la fonction

3.1 Dérivabilité

Propriétés :

- La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\exp'(x) = ...$ c'est à dire $(e^x)' = ...$
- la fonction exponentielle de base e est .... sur .... ;

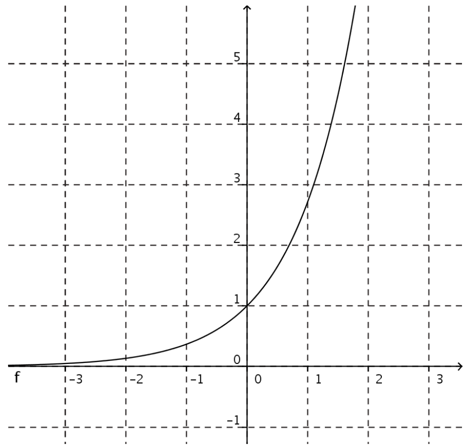
3.2 Tableau de variations et limites

Propriété :

$\lim_{x \to +\infty} e^x = ...$ et $\lim_{x \to -\infty} e^x = ...$

x	$-\infty$	...	....	$+\infty$
				....
			.....	
		.....		
		.....		
	....			

3.3 Courbe représentative



3.4 Tableau de signe

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$\exp(x)$	.....

4 Composées avec la fonction exponentielle

Propriété :

Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I.
- La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = ...$$

;
- la fonction e^u est une primitive de la fonction ....

Preuve :
Application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.