Fonctions exponentielles, cours, terminale STI

F.Gaudon

26 juillet 2010

Table des matières

1 Définitions

Propriété et définition :

On appelle *fonction exponentielle de base e* la fonction notée exp qui à tout réel x associe l'unique nombre y de $]0;+\infty[$ tel que $\ln(y) = x$.

Preuve :
La fonction ln est dérivable et strictement croissante de $]0;+\infty[$ sur $]-\infty;\infty[$ donc pour tout réel x, il existe bien un unique réel y tel que $\ln(y) = x$.

Notation :

On a vu lors du chapitre sur la fonction ln que pour tout entier relatif n, on a $\ln(e^n) = n$. Ceci signifie donc que $\exp(n) = e^n$ pour tout entier relatif n. On convient d'étendre cette notation à tout nombre réel x et on écrira donc pour tout réel x, $\exp(x) = e^x$.

2 Propriétés algébriques

Propriétés :

- Pour tout $y > 0$ et tout x réel, $\exp(x) = y$ équivaut à $x = \ln y$;
- pour tout x réel, $\ln(e^x) = x$ ce qui s'écrit encore $\ln(\exp(x)) = x$;
- pour tout $y > 0$, $e^{\ln(y)} = y$ ou $\exp(\ln(y)) = y$;
- pour tout x et x' réels, $\exp(x)\exp(x') = \exp(x + x')$ ou $e^x e^{x'} = e^{x+x'}$;
- $\exp(a) = \exp(b)$ si et seulement si $a = b$;
- $\exp(a) < \exp(b)$ si et seulement si $a < b$.

Preuve :
- Traduction de la définition.
- Traduction de la définition avec $y = \exp(x)$.
- Traduction de la première propriété avec $x = \ln(y)$.
- On a $\ln(\exp(x)\exp(x')) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(x'))$ d'après les propriétés de ln et $\ln(\exp(x)) = x$, $\ln(exp(x')) = x'$ d'après les propriétés précédentes donc $\ln(\exp(x)\exp(x')) = x + x'$ ce qui, par définition de l'exponentielle signifie que $\exp(x)\exp(x') = \exp(x + x')$.
- $\exp(a) = \exp(b)$ si et seulement $\ln(\exp(a)) = \ln(\exp(b))$ si et seulement si $a = b$.
- Même raisonnement que la propriété précédente.

Propriétés :

pour tout entier relatif n et pour tous les réels x et x' on a :
- $(e^x)^n = e^{nx}$;
- $\frac{1}{e^x} = e^{-x}$;
- $\frac{e^x}{e^{x'}} = e^{x-x'}$;

Preuve :

- $\ln((e^x)^n) = n\ln(e^x) = nx\ln(e) = nx$ donc $(e^x)^n = e^{nx}$;
- $\ln(\frac{1}{e^x}) = -\ln(e^x) = -x\ln(e) = -x$ d'où le résultat ;
- $\frac{e^x}{e^{x'}} = e^x \times \frac{1}{e^{x'}}$ et on utilise le résultat précédent.

3 Étude de la fonction

3.1 Dérivabilité

Propriétés :

- La fonction exponentielle de base e est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel $\exp'(x) = \exp(x)$ c'est à dire $(e^x)' = e^x$.
- la fonction exponentielle de base e est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;

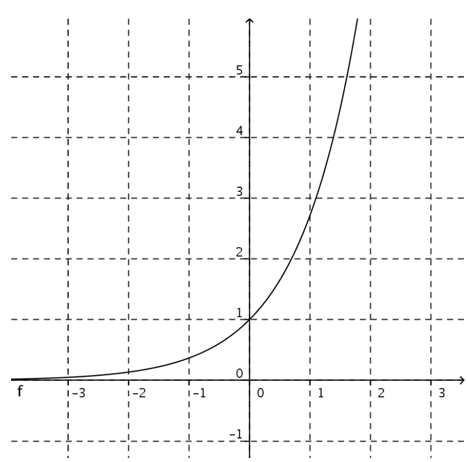
3.2 Tableau de variations et limites

Propriété :

$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
						$\nearrow$	$+\infty$
					e		
				$\nearrow$			
			1				
	0	$\nearrow$					

3.3 Courbe représentative



3.4 Tableau de signe

x	$-\infty$ $+\infty$
$\exp(x)$	$+$

4 Composées avec la fonction exponentielle

Propriété :

Soit u est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction e^u est dérivable sur I et

$$(e^u)' = u'e^u$$

;
- la fonction e^u est une primitive de la fonction $u'e^u$.

Preuve :
Application directe du théorème de dérivation des fonctions composées.