Dérivation de fonctions, cours, Terminale STI

F.Gaudon

25 juillet 2010

Table des matières

1 Fonctions dérivées, rappels et compléments

1.1 Définitions et propriétés

Définition et propriétés :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $x_0 \in I$.
Si $\lim_{x \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe et appartient à $\mathbb{R}$, on dit que la fonction f est dérivable en x_0 Cette limite est alors notée $f'(x_0)$ et appelée nombre dérivé de f en x_0.
La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère admet alors pour tangente en $M_0(x_0; f(x0))$ la droite $\mathcal{T}$ de coefficient directeur $f'(x_0)$. $\mathcal{T}$ a pour équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

.

Définition :

Si f est dérivable en tout point x_0 d'un intervalle I, on dit que f est dérivable sur I.
La fonction $x \mapsto f'(x)$ est appelée fonction dérivée de f et notée f'.

1.2 Formules de dérivation

$f(x)$	$f'(x)$	$\mathcal{D}_{f'}$
k	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
$mx+p$	m	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$

$u+v$	$u'+v'$
ku, $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v+v'u$
$\frac{1}{v}$	$\frac{-v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$

2 Dérivées de fonctions composées

Théorème :

Si u est une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x \in I$ et si f est une fonction dérivable en $u(x)$, alors la fonction définie par $g(x) = f(u(x))$ est dérivable en x et

$$g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$$

. En particulier :

- $x \mapsto f(ax+b)$ a pour dérivée $x \mapsto a \times f'(ax+b)$
- u^n a pour dérivée $nu'u^{n-1}$

Exemples :

- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (2-5x)^2$. On a $g'(x) = -5 \times 2 \times (2-5x)^1 = -10(2-5x)$.
- Soit h la fonction définie sur $]\frac{5}{4}; +\infty[$ par $h(x) = \sqrt{4x-5}$, on a pour $x \in]\frac{5}{4}; +\infty[$
  $h'(x) = 4 \times \frac{1}{2\sqrt{4x-5}} = \frac{2}{\sqrt{4x-5}}$.