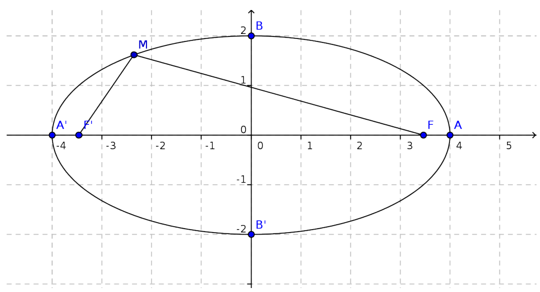
# Coniques, cours, classe de terminale STI

## 1 Ellipse

**Définition :**

Soient $F$ et $F'$ deux points. On note $c = \frac{FF'}{2}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > c$. Soit $O$ le milieu de $[FF']$.

- L'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M$ du plan tels que ............................... est appelé *ellipse* de ...................... $F$ et $F'$.
- $(FF')$ est appelé .......................... $O$ est appelé ......................... .
- On pose $e = \frac{c}{a}$. $e$ est appelé ....................... de la conique.




**Remarque :**
On a $0 < e < 1$ et plus $e$ est proche de 0, plus l'ellipse est ............... ................ ................

**Propriété et définition :**

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormé d'origine O tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$. On note $b$ le nombre $b =$ ............ Alors les points $A(.........)$, $A'(..........)$, $B(..........)$ et $B'(............)$ sont des points de l'ellipse appelés *sommets* de l'ellipse. $a$ est appelé *demi-grand* axe de l'ellipse et $b$ est appelé *demi-petit axe*.

**Preuve :**

- On a $AF + AF' = (a - c) + (a + c) = a - c + a - c = 2a$ donc A appartient à l'ellipse définie par $MF + MF' = 2a$. De même, A' appartient à la conique.
- Soit $b = \sqrt{a^2 - c2}$ et $B(0; b)$. On a $BF + BF' = 2BF$ car B appartient à la médiatrice de $[FF']$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BOF rectangle en O on a obtient $BF^2 = OB^2 + OF^2$ donc $BF^2 = b^2 + c^2$. Or $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ donne $b^2 = a^2 - c^2$ donc $BF^2 = a^2 - c^2 + c^2 = a^2$ et $BF = a$. Finalement, on obtient donc $BF + BF' = 2BF = 2a$ ce qui montre que le point B appartient à la conique.

**Propriété et définitions :**

Soit $O$ le milieu de $FF'$. On appelle $\mathcal{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$ le repère orthonormal d'origine $O$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$.

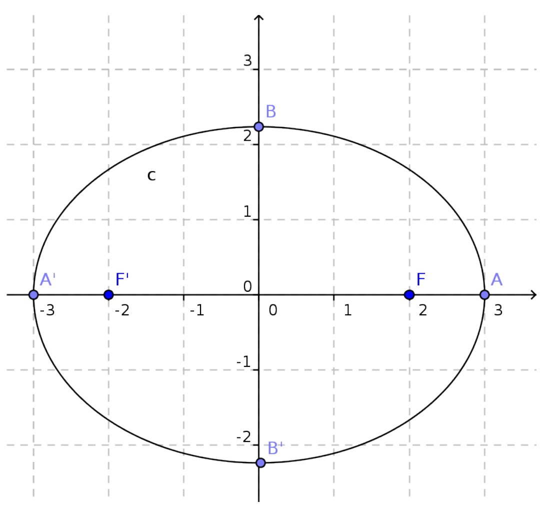
- Alors, dans ce repère, l'ellipse $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que ............... ................ où $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et $0 < b < a$.
- $O$ est appelé ......... ............ de la conique.
- Les points $A(....; ....)$, $A'(....; ....)$, $B(.....; .....)$ et $B'(.....; ....)$ appartiennent à $\mathcal{E}$ et sont appelés ........................... de l'ellipse.
- $a$ est appelé *demi-grand axe* et $b$ *demi-petit axe* de l'ellipse.

**Propriété :**

L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ est l'équation cartésienne de l'ellipse

- de centre ............. ;
- de foyers $F(.....; .....)$ , $F'(.....; .....)$ avec $c =$ .............. ;
- d'excentricité $e =$ ........ ;
- d'axe focal ........... ;
- de sommets $A(....; ....)$, $A'(....; .....)$, $B(.....; .....)$ et $B'(.....; .....)$.

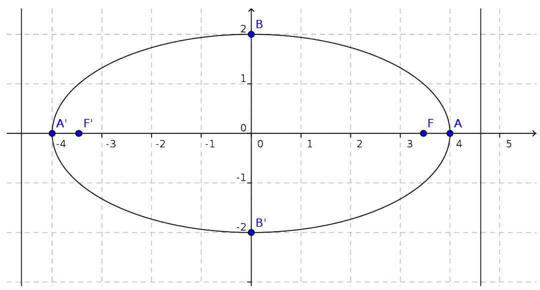
**Exemple :**
Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ dans un repère orthonormé. On pose $a =$ ... et $b =$ ......... $\mathcal{C}$ est l'ellipse de centre ...., d'axe focal ........, de sommets $A(.........)$, $A'(.........)$, $B(............)$ et $B'(............)$. En outre, on a $b^2 =$ .......... donc $c^2 =$ .............................. d'où $c =$ ....... et les foyers sont $F(............)$ et $F'(..............)$.




**Propriétés :**

- $O$ est le centre de symétrie de l'ellipse $\mathcal{E}$ ;
- $(Ox)$ et $(Oy)$ sont des axes de symétrie de l'ellipse.

**Preuve :**
Soit $M(x;y)$. Alors $M'(-x;-y)$ est son symétrique par rapport à $O$. $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow M' \in \mathcal{E}$. On procède de même pour les deux autres symétries.




**Propriété (représentation paramétrique) :**

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est l'ensemble des points $M(x(t);y(t))$ tels que : $x(t) =$ ............. et $y(t) =$ ............. avec $t \in [0;2\pi]$. On dit que l'ellipse est l'image du cercle de centre O et de rayon $a$ par une *affinité orthogonale* d'axe $(Ox)$ et de rapport $\frac{b}{a}$.

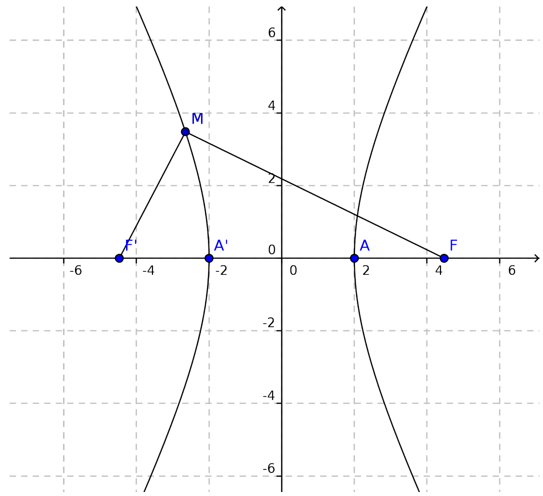
## 2 Hyperbole

**Définition :**

Soient $F$ et $F'$ deux points. On note $c = \frac{FF'}{2}$. Soit $O$ le milieu de $[FF']$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < c$.

- L'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M$ du plan tels que ...................... est appelé *hyperbole* de *foyers* $F$ et $F'$.
- $(FF')$ est appelé *axe focal*. $O$ est appelé *centre* de l'hyperbole.
- On pose $e =$ ............. $e$ est appelé excentricité de la conique.

**Remarque :**
On a $e$....1, ce qui est caractéristique des hyperboles.




**Propriété et définition :**
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormé d'origine O tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$. Alors les points $A(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$ et $A'(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$ sont des points de l'hyperbole appelés ............................ de l'hyperbole.

**Propriété :**

Soit $O$ le milieu de $FF'$. On appelle $\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormal d'origine $O$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$.

- Alors, dans ce repère, l'hyperbole $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que ............................ où $b =$ ..................
- $O$ est le centre de la conique.
- Les points $A(\ldots;\ldots)$ et $A'(\ldots\ldots;\ldots)$ appartiennent à $\mathcal{H}$ et sont les sommets de l'hyperbole.
- Les droites d'équation $y =$ ................ et $y =$ ............. sont des asymptotes à l'hyperbole.

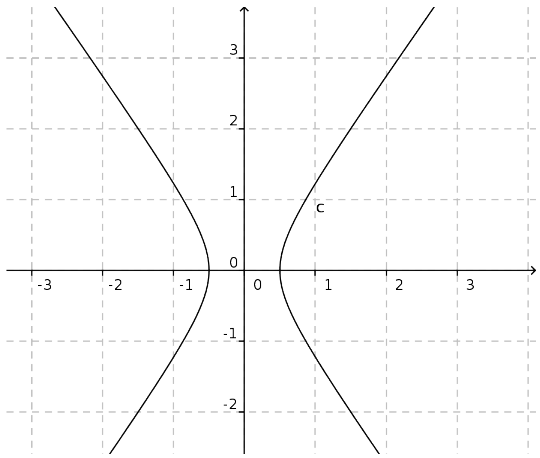
**Propriété :**

L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'équation de l'hyperbole

- de centre ...... ;
- de foyers $F(\ldots;\ldots)$, $F'(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ avec $c =$ ............. ;
- d'excentricité $e =$ ............ ;
- d'axe focal .......... ;
- de sommets $A(\ldots\ldots;\ldots)$ et $A'(\ldots\ldots;\ldots\ldots)$ ;
- d'asymptotes les droites d'équation $y =$ ........... et $y =$ ...........

**Exemple :**

Considérons la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $4x^2 - 2y^2 = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette équation s'écrit ......................................... d'où .....................................................
On pose $a =$ ........... et $b =$ ................ et on a $c =$ ............................ La courbe $\mathcal{C}$ est donc l'hyperbole de centre ....., d'axe focal ............ de sommets $A$(................) et $A'$(..................), de foyers $F$(.......................) et $F'$(.......................).




**Propriétés :**

- $O$ est le centre de symétrie de l'hyperbole $\mathcal{H}$ ;
- $(Ox)$ et $(Oy)$ sont des axes de symétrie de l'hyperbole.