Coniques, cours, Terminale STI

F.Gaudon

22 février 2011

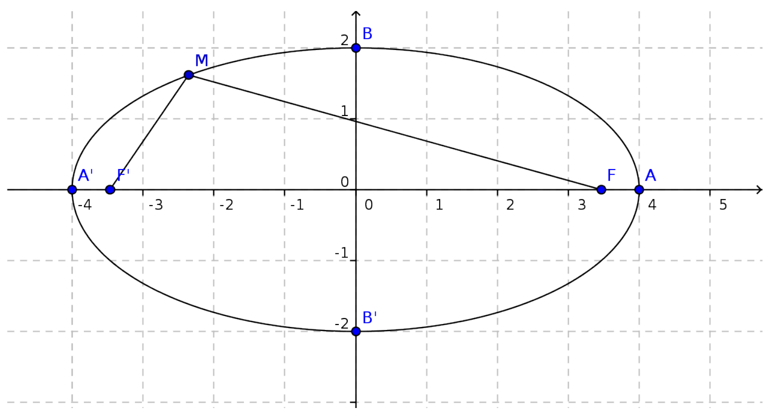
Table des matières

1 Ellipse

Définition :

Soient F et F' deux points. On note $c = \frac{FF'}{2}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $a > c$. Soit O le milieu de $[FF']$.

- L'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan tels que $MF + MF' = 2a$ est appelé *ellipse* de *foyers* F et F', de centre le milieu O de $[FF']$.
- (FF') est appelé *axe focal*. O est appelé *centre* de l'ellipse.
- On pose $e = \frac{c}{a}$. e est appelé *excentricité* de la conique.



Propriété et définitions :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormé d'origine O tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$. On note b le nombre $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Alors les points $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $B(0;b)$ et $B'(0;-b)$ sont des points de l'ellipse appelés *sommets* de l'ellipse. a est appelé *demi-grand* axe de l'ellipse et b est appelé *demi-petit axe*.

Preuve :

- On a $AF + AF' = (a-c) + (a+c) = a - c + a - c = 2a$ donc A appartient à l'ellipse définie par $MF + MF' = 2a$. De même, A' appartient à la conique.
- Soit $b = \sqrt{a^2 - c2}$ et $B(0;b)$. On a $BF + BF' = 2BF$ car B appartient à la médiatrice de $[FF']$. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle BOF rectangle en O on a obtient $BF^2 = OB^2 + OF^2$ donc $BF^2 = b^2 + c^2$. Or $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ donne $b^2 = a^2 - c^2$ donc $BF^2 = a^2 - c^2 + c^2 = a^2$ et $BF = a$. Finalement, on obtient donc $BF + BF' = 2BF = 2a$ ce qui montre que le point B appartient à la conique.

Propriété :

Soit O le milieu de FF'. On appelle $\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormal d'origine O tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$. Alors, dans ce repère, l'ellipse $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ et $0 < b < a$.

Preuve :
Soit $M(x;y)$. On a $F(x;0)$ donc $MF^2 = (x-c)^2 + y^2$. et de même $MF'^2 = (x+c)^2 + y^2$. D'où $MF+MF'^2 = x^2-2cx+c^2+y^2-x^2-2cx-c^2-y^2 = -4cx$. D'où $(MF-MF')\times(MF+MF') = -4cx$. Or $M \in \mathcal{E}$ équivaut à $MF+MF' = 2a$ donc à $(MF-MF')\times 2a = -4cx$ c'est à dire à $MF-MF' = -2\frac{c}{a}x$. De $MF+MF' = 2a$ et $MF-MF' = -2\frac{c}{a}x$ on déduit par addition membre à membre $2MF = 2a-2\frac{c}{a}x$ et $2MF' = 2a+2\frac{c}{a}x$ c'est à dire $MF = a - \frac{c}{a}x$ et $MF' = a + \frac{c}{a}x$.

$M(x;y) \in \mathcal{E} \Rightarrow MF^2 = (a-\frac{c}{a}x)^2$ et $MF'^2 = (a+\frac{c}{a}x)^2$ D'où $(x-c)^2+y^2 = (a-\frac{c}{a}x)^2$ c'est à dire $x^2-2cx+c^2+y^2 = a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$ ce qui équivaut à $(1-\frac{c^2}{a^2})x^2+y^2 = a^2-c^2$ et $\frac{a^2-c^2}{a^2(a^2-c^2)}x^2 + \frac{y^2}{a^2-c^2} = 1$.

Réciproquement, soit $M(x;y)$ un point de l'ensemble $\mathcal{E}$ d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a > b > 0$, $F(c;0)$ et $F'(-c;0)$ et $c = \sqrt{a^2-b^2}$.

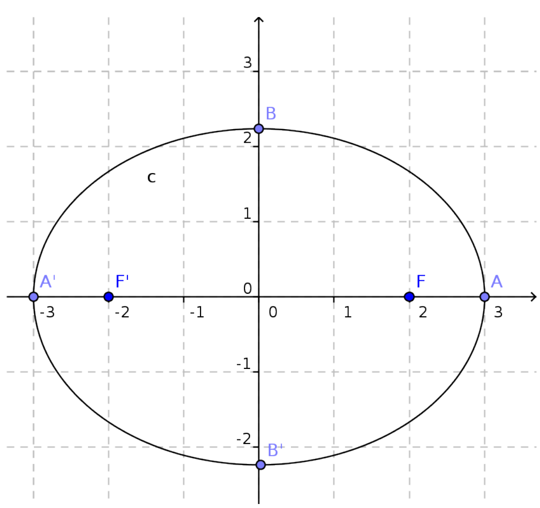
On a alors $MF^2 = (x-c)^2+y^2 = x^2+y^2+c^2-2cx$. Or $\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$ et $y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2$ puis $y^2 = a^2-c^2-x^2\frac{(a^2-c^2)}{a^2}$. Donc $MF^2 = x^2+a^2-c^2-x^2+\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+c^2 = a^2+\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx$. Or $(a-\frac{cx}{a})^2 = a^2-2cx+\frac{c^2}{a^2}x^2$ donc $MF^2 = (a-\frac{c}{a}x)^2$ et de même $MF'^2 = (a+\frac{c}{a}x)^2$ d'où l'on déduit que $MF = a-\frac{c}{a}x$ et $MF' = a+\frac{c}{a}x$ en tenant compte des signes ($x \leq a$ donc $x \leq \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ et $x \leq \frac{a^2}{c}$ donc $a-\frac{c}{a}x \geq 0$) et $MF+MF' = 2a$.

Propriété :

L'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < b < a$ est l'équation de l'ellipse
- de centre O ;
- de foyers $F(c;0)$, $F'(-c;0)$ avec $c = \sqrt{a^2-b^2}$;
- d'excentricité $e = \frac{c}{a}$;
- d'axe focal (FF') ;
- de sommets $A(a;0)$, $A'(-a;0)$, $B(0;b)$ et $B'(0;-b)$.

Preuve :
Contenue dans ce qui précède.

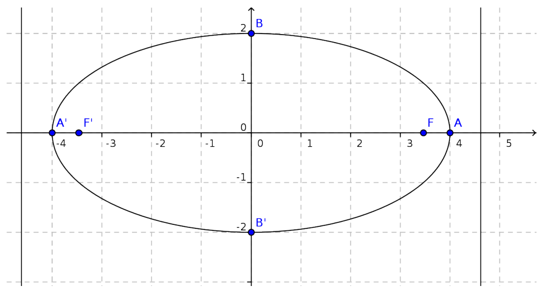
Exemple :
Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ dans un repère orthonormé. On pose $a = 3$ et $b = \sqrt{5}$. $\rfloor$ est l'ellipse de centre O, d'axe focal (Ox), de sommets $A(3;0)$, $A'(-3;0)$, $B(\sqrt{5};0)$ et $B'(-\sqrt{5};0)$. En outre, on a $b^2 = a^2-c^2$ donc $c^2 = a^2-b^2 = 9-5 = 4$ d'où $c = 2$ et les foyers sont $F(2;0)$ et $F'(-2,0)$.



Propriétés :

- O est le centre de symétrie de l'ellipse $\mathcal{E}$;
- (Ox) et (Oy) sont des axes de symétrie de l'ellipse.

Preuve :
Soit $M(x;y)$. Alors $M'(-x;-y)$ est son symétrique par rapport à O. $M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow M' \in \mathcal{E}$. On porcède de même pour les deux autres symétries.



Propriété (représentation paramétrique) :

L'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans un repère orthonormal $(O;\vec{i};\vec{j})$ est l'ensemble des points $M(x(t);y(t))$ tels que : $x(t) = a\cos(t)$ et $y(t) = b\cos(t)$ avec $t \in [0;2\pi]$.
On dit que l'ellipse est l'image du cercle de centre O et de rayon a par une *affinité orthogonale* d'axe (Ox) et de rapport $\frac{b}{a}$.

Preuve :
Soit $M(a\cos(t);b\sin(t))$ où t est un réel. Alors $\frac{(a\cos(t))^2}{a^2} + \frac{(b\sin(t))^2}{b^2} = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ donc $M \in \mathcal{E}$.

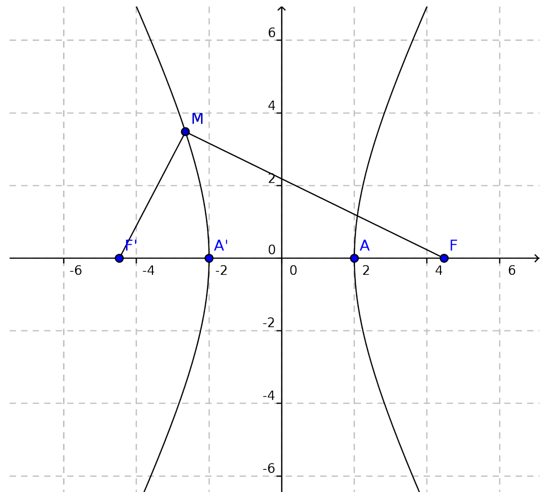
Réciproquement, si $M \in \mathcal{E}$ alors $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ c'est à dire $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = 1$ donc M appartient au cercle trigonométrique et il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{x}{a} = \cos(t)$ et $\frac{y}{b} = \sin(t)$ ce qui démontre le paramétrage voulu.

2 Hyperbole

Définition :

Soient F et F' deux points. On note $c = \frac{FF'}{2}$. Soit O le milieu de $[FF']$.
Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $0 < a < c$. L'ensemble $\mathcal{H}$ des points M du plan tels que $|MF - MF'| = 2a$ est appelé *hyperbole* de *foyers* F et F'.
(FF') est appelé *axe focal*. O est appelé *centre* de l'hyperbole
On pose $e = \frac{c}{a}$. e est appelé excentricité de la conique.

Remarque :
On a $e > 1$, e ce qui est caractéristique des hyperboles.



Propriété et définition :
Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormé d'origine O tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$. Alors les points $A(a;0)$ et $A'(-a;0)$ sont des points de l'hyperbole appelés *sommets* de l'hyperbole.

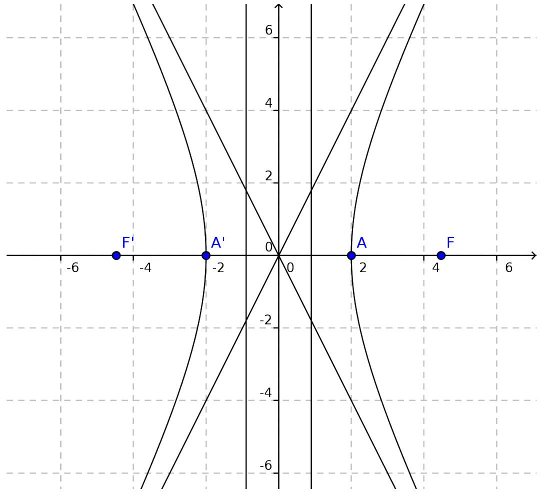
Propriété :

Soit O le milieu de FF'. On appelle $\mathcal{R} = (O;\vec{i};\vec{j})$ le repère orthonormal d'origine O tel que $\vec{i} = \frac{1}{OF}\vec{OF}$.
- Alors, dans ce repère, l'hyperbole $\mathcal{H}$ est l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ où $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.
- Les points $A(a;0)$ et $A'(-a;0)$ appartiennent à $\mathcal{H}$ et en sont les sommets.
- Les droites d'équation $y = -\frac{b}{a}x$ et $y = \frac{b}{a}x$ sont des asymptotes à l'hyperbole.

Preuve :
Admise.

Propriété :

L'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'équation de l'hyperbole
- de centre O ;
- de foyers $F(c;0)$, $F'(-c;0)$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;
- d'excentricité $e = \frac{c}{a}$;
- d'axe focal (FF') ;
- de sommets $A(a;0)$ et $A'(-a;0)$;
- d'asymptotes les droites d'équation $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.



Propriétés :

- O est le centre de symétrie de l'hyperbole $\mathcal{H}$;
- (Ox) et (Oy) sont des axes de symétrie de l'hyperbole.

Exemple :

Considérons la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $4x^2 - 2y^2 = 1$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. Cette équation s'écrit $\frac{x^2}{\frac{1}{4}} - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ d'où $\frac{x^2}{(\frac{1}{2})^2} + \frac{y^2}{(\frac{1}{\sqrt{2}})^2} = 1$.

On pose $a = \frac{1}{2}$ et $b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et on a $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. La courbe $\mathcal{C}$ est donc l'hyperbole de centre O, d'axe focal (Ox) de sommets $A(\frac{1}{2}; 0)$ et $A'(-\frac{1}{2}; 0)$, de foyers $F(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$ et $F'(-\frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$.