Taux d'évolution, cours de Terminale STG

F.Gaudon

7 novembre 2007

Table des matières

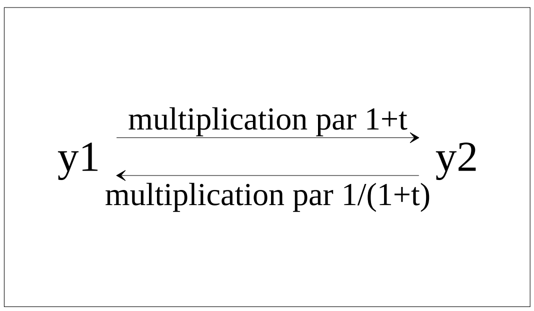
1 Évolutions

Propriété et définition :

Si une quantité évolue à partir d'une valeur y_1 de départ d'un taux t (augmentation si $t > 0$, diminution si $t < 0$), alors la valeur finale y_2 est :

$$y_2 = (1+t)y_1$$

$1+t$ est appelé le *coefficient multiplicateur* associé à la hausse ou à la baisse.



Propriété et définition :

Le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1 est $\frac{1}{1+t}$. Le taux d'évolution associé est $\frac{1}{1+t} - 1$ et est appelé *taux réciproque*.

Preuve :

$$y_2 = (1+t)y_1$$
$$y_1 = \frac{y_2}{1+t}$$
$$y_1 = \frac{1}{1+t}y_2$$

Exemple :
Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.
$1,07 \div (1 + \frac{20}{100}) \approx 0,89$. Il y a un an le litre de gasoil valait 0,89€.

Propriété :

Si une quantité varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 alors le taux d'évolution est :
$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

Preuve :

$$\begin{aligned} y_2 &= (1+t)y_1 \\ y_2 &= y_1 + ty_1 \\ y_2 - y_1 &= ty_1 \\ t &= \frac{y_2 - y_1}{y_1} \end{aligned}$$

Preuve

Exemple :
L'indice CAC40 de la bourse de Paris est passé de 5327 points à 4784 points.
$\frac{4784-5327}{5327} \times 100 \approx -10,2$.
L'indice a donc baissé de 10,2%.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, le coefficient multiplicateur est $\frac{4784}{5327} \approx 0,898$. Le coefficient multiplicateur réciproque est $\frac{5327}{4784} \approx 1,114$ d'où un taux réciproque de 0,114 soit 11,4% ce qui signifie qu'une augmentation de 4784 points à 5327 points aurait été de 11,4%, pas de 10,2%.

2 Évolutions successives

2.1 Taux global

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, ..., t_n à partir d'une valeur initiale y_1, alors la quantité finale est :

$$y_2 = (1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)y_1$$

$(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n)$ est le *coefficient multiplicateur global*.
$(1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n) - 1$ est le *taux global*.

Exemple :
La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.

$$(1+\frac{2,3}{100})(1-\frac{3,4}{100})^2 \approx 0,9546$$

Le coefficient multiplicateur global est 0,9546 soit un taux global d'évolution de $0,9546 - 1 = -0,0453$ soit une baisse de 4,53% (remarque : ce n'est pas la somme des taux successifs : $2,3 - 3,4 - 3,4 = -4,5$).

2.2 Taux moyen

Pour définir le taux moyen, nous avons tout d'abord besoin d'une nouvelle définition mathématique.

2.2.1 Moyenne géométrique

Propriété et définition :

Pour tout a réel strictement positif et pour tout entier naturel n non nul, l'équation $x^n = a$ admet une unique solution appelée racine n-ième de a et notée $\sqrt[n]{a}$ ou $a^{\frac{1}{n}}$.

Preuve :
voir chapitre sur les exposants non entiers.

Exemple :
Si un réel x vérifie $x^3 = 8$ alors $x = 2$ on a donc $\sqrt[3]{8} = 2$. Si un nombre x vérifie $x^4 = 54$ alors $x = \sqrt[4]{54} \approx 2,71$.

Définition :

On appelle *moyenne géométrique* et n nombres a_1, a_2, ..., a_n strictement positifs, le nombre

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = (a_1 a_2 \dots a_n)^{\frac{1}{n}}$$

.

2.2.2 Application au calcul de taux moyens

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives de taux t_1, t_2, ..., t_n, on appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre

$$((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}}$$

et *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre

$$((1+t_1)(1+t_2)\dots(1+t_n))^{\frac{1}{n}} - 1$$

Exemple :
Un prix initial de 100 e subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %. $\sqrt{(1+\frac{2}{100})(A-\frac{30}{100})} = \sqrt{0,714} \approx 0,8450$. En outre,
$0,8450 - 1 = -0,1550$ soit 15,5 % de baisse annuelle en moyenne.

3 Indices de base 100

Définition :

On appelle *indice* i de base 100 d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_2, le nombre :

$$i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$$

Exemple :
On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007. On a $\frac{18,2}{16} \times 100 = 113,75$. L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc 113,75.

Propriété :

Soit t le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2. On suppose que l'on connaît l'indice i de y_2 par rapport à y_1. Alors

$$t = \frac{i}{100} - 1$$

Preuve :
On a $i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$ par définition donc $\frac{y_2}{y_1} = \frac{i}{100}$. D'autre part, $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ par définition. Par conséquent,

$$\begin{aligned} t &= \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1}{y_1} \\ &= \frac{y_2}{y_1} - 1 \\ &= \frac{i}{100} - 1 \end{aligned}$$

Exemple :
On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004. Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'augmentation a été de 5,3 %. Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est 109,7 %.

4 Approximations de taux faibles

Propriété :

- Pour t « proche » de 0, $(1+t)^2 \approx 1 + 2t$.
  Deux évolutions successives pour un taux t voisin de 0 reviennent donc approximativement à une évolution de taux $2t$.
- Pour t « proche » de 0, $\frac{1}{1+t} \approx 1 - t$.
  Le taux réciproque d'une évolution pour un taux t voisin de 0 est donc approximativement de $-t$.
- Pour t « proche » de 0, $(1+t)^n \approx 1 + nt$ pour tout entier naturel n.

Exemple :
Un prix subit une augmentation de 0,2 %. Les prix après augmentation est alors de 70 €. On a $70 \div (1+\frac{0{,}2}{100}) \approx 69,86027$ ou $70 \times \frac{1}{1+\frac{0{,}2}{100}} \approx 69,86027$ mais $70 \times (1-\frac{0{,}2}{100}) = 69,86$. Il y a donc une différence mais compte tenu de la situation elle est négligeable.
Par contre, si l'augmentation est de 2 %, on a $70 \times \frac{1}{1+\frac{0{,}2}{100}} \approx 68,63$ mais $70 \times (1-\frac{2}{100}) \approx 68,60$. La différence n'est plus négligeable.