

Fonction logarithme népérien, cours de Terminale STG

F.Gaudon

22 mars 2008

Table des matières

1	Construction de la fonction logarithme népérien	2
2	Propriétés algébriques	2
3	Propriétés analytiques	3
3.1	Étude de la fonction	3
3.2	Tableau de variation	4
3.3	Tableau de signe	4
3.4	Représentation graphique	4
4	Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien	5
5	Dérivation de fonctions composées avec la fonction logarithme népérien	6

1 Construction de la fonction logarithme népérien

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite au XVI^e siècle par Neper afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions (source : document d'accompagnement des programmes de terminale STG).

On cherche une fonction donc une fonction f qui vérifie $f(ax) = f(a) + f(x)$ pour tous les réels strictement positifs a et x .

Propriété :

Soit f est une fonction dérivable sur \mathbb{R} vérifiant : pour tous réels a et x strictement positifs, $f(ax) = f(a) + f(x)$, alors $f'(x) = \frac{k}{x}$ où k est un nombre réel.

Preuve :

On suppose dans un premier temps qu'une telle fonction f existe. Alors $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1)$ donc $f(1) = 2f(1)$ d'où $f(1) = 0$. D'autre part, soit $a > 0$, pour tous les réels $x > 0$, on a $f(ax) = f(a) + f(x)$ d'où en dérivant $af'(ax) = f'(x)$ et pour $x = 1$ on obtient $af'(a) = f'(1)$ donc $f'(a) = \frac{f'(1)}{a}$. D'où pour tous les réels $x > 0$, $f'(x) = \frac{f'(1)}{x}$. Choisissons $f'(1) = k$ où k est un réel quelconque puisqu'aucune contrainte ne semble fixer $f'(1)$. On a donc $f'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout réel $x > 0$.

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction notée \ln définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée est $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ et $\ln(1) = 0$. Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

2 Propriétés algébriques

Propriété :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :

Soit $a > 0$. On pose pour tout réel $x > 0$, $h(x) = \ln(ax) - \ln(a) - \ln(x)$. Il s'agit de montrer que h est nulle h est dérivable sur $]0; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $h'(x) = a \frac{1}{ax} - \frac{1}{x} = 0$. h' est donc la fonction nulle d'où ses primitives sont constantes. h est donc constante. Comme $h(1) = \ln(a) - \ln(a) - \ln(1) = 0$, h est donc la fonction nulle aussi. D'où pour tout $x > 0$ et tout $a > 0$ on a $\ln(ax) = \ln(a) + \ln(x)$.

Propriétés :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$;
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$;
- pour tout entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln a$;
- $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$;

Preuve :

- D'une part, $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(1) = 0$.
D'autre part, $\ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right)$
Donc $\ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0$ d'où le résultat.
- $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \frac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ d'après ce qui précède.
- Découle directement du fait que $\ln(a^n) = \underbrace{\ln(a) + \ln(a) + \dots + \ln(a)}_{n \text{ fois}}$.
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a}) = 2 \ln(\sqrt{a})$. D'où le résultat.

Exemples :

- $\ln(32) = \ln(2^5) = 5 \ln(2)$;
- $\ln(1/10^8) = -8 \ln(10)$.

3 Propriétés analytiques

3.1 Étude de la fonction

Propriété :

\ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Preuve :

Découle du fait que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

Propriété et définition :

Il existe un unique réel dont le logarithme népérien vaut 1, on appelle e cet unique réel tel que $\ln(e) = 1$.

Preuve :

Découle de l'hypothèse (forte) que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

3.2 Tableau de variation

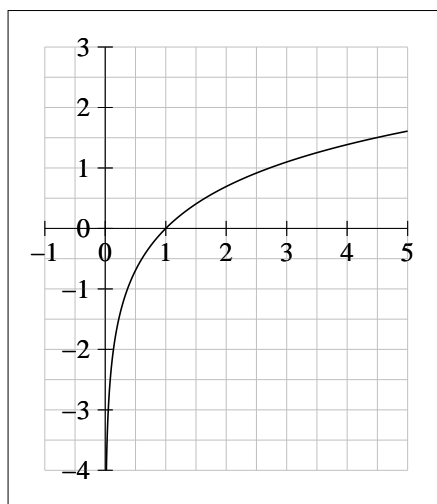
x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln(x)$		↗

3.3 Tableau de signe

x	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$		- 0 +	

3.4 Représentation graphique

On parle de *croissance logarithmique* pour décrire une telle évolution.



4 Résolution d'équations et d'inéquations avec le logarithme népérien

Propriété :

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si $a = b$.
- $\ln(a) \geq \ln(b)$ si et seulement si $a \geq b$.

Preuve :

Découle de l'hypothèse (forte) que \ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

Exemples :

- $\ln(x - 1) = 0$

Première étape : détermination de l'ensemble de définition.

On a $x - 1 > 0$ si et seulement si $x > 1$ donc l'ensemble de définition est $]1; +\infty[$. Deuxième étape : résolution de l'équation.

On a $\ln(x - 1) = 0$ qui s'écrit $\ln(x - 1) = \ln(1)$ ce qui équivaut à $x - 1 = 1$ donc $x = 2$. Comme 2 est dans l'ensemble de définition, c'est donc l'unique solution de l'équation.

- $\ln(x - 1) = 2$

Première étape : on a affaire au même ensemble de définition $]1; +\infty[$ que dans l'exemple précédent.

Deuxième étape : $\ln(x - 1) = 2$ s'écrit $\ln(x - 1) = \ln(e^2)$ ce qui équivaut à $x - 1 = e^2$ donc $x = 1 + e^2$. Comme $1 + e^2$ appartient à l'ensemble de définition, c'est l'unique solution.

- $\ln(2x - 1) < 5$

Première étape : détermination de l'ensemble de définition.

On a $2x - 1 > 0$ qui donne $x > \frac{1}{2}$ donc l'ensemble de définition est $]\frac{1}{2}; +\infty[$.

Deuxième étape : résolution de l'inéquation.

$\ln(2x - 1) < 5$ s'écrit aussi $\ln(2x - 1) < 5 \ln(e)$ c'est à dire

$\ln(2x - 1) < \ln(e^5)$ ce qui équivaut à $2x - 1 < e^5$ donc à $x < \frac{e^5 + 1}{2}$.

Comme $\frac{e^5 + 1}{2}$ est dans l'ensemble de définition, c'est l'unique solution de l'inéquation.

5 Dérivation de fonctions composées avec la fonction logarithme népérien

Propriété :

Soit u une fonction définie et strictement positive sur un intervalle I , alors la fonction définie sur I par $x \mapsto \ln(u(x))$ est dérivable et de dérivée $(\ln(u))'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Preuve :

Découle directement du théorème de dérivation de fonction composées.

Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 \ln(3x + 5)$ sur l'intervalle $]-\frac{5}{3}; +\infty[$.

On pose $u(x) = 3x + 5$ et on a $u'(x) = 3$ d'où $f'(x) = 2 \frac{u'(x)}{u(x)} = 2 \frac{3}{3x+5} = \frac{6}{2x+5}$.