Taux d'évolution, TSTG

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

30 mai 2009

Plan

Propriété et définition :

Si une quantité évolue à partir d'une valeur y_1 de départ d'un taux t (augmentation si $t > 0$, diminution si $t < 0$), alors la valeur finale y_2 est :

...

$1 + t$ est appelé le *coefficient multiplicateur* associé à la hausse ou à la baisse.

$$\text{y1} \;\underset{\text{multiplication par } 1/(1+t)}{\overset{\text{multiplication par } 1+t}{\rightleftarrows}}\; \text{y2}$$

Propriété et définition :

On appelle *coefficient multiplicateur réciproque* le coefficient multiplicateur permettant de passer de y_2 à y_1. Il vaut :

$$\ldots$$

Le taux d’évolution associé est .... et est appelé *taux d’évolution réciproque*.

Preuve :

$\ldots = \ldots$

$\ldots = \ldots$

$\ldots = \ldots.$

Exemple :

Le prix du gasoil a augmenté de 20% en un an. Son prix actuel est de 1,07€ par litre.

....

Il y a un an le litre de gasoil valait ....

Plan

Propriété :

Si une quantité varie d'une valeur initiale y_1 à une valeur finale y_2 alors le taux d'évolution est :

$$\dots$$

Preuve :

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

$$\dots = \dots$$

Exemple :

L'indice CAC40 de la bourse de Paris est passé de 5327 points à 4784 points.
...
L'indice a donc baissé de ....

Remarque :
Dans l'exemple précédent, le coefficient multiplicateur est $\frac{4784}{5327} \approx 0,898$.
Le coefficient multiplicateur réciproque est ....
d'où un taux réciproque de .... soit ....
Cela signifie qu'une augmentation de 4784 points à 5327 points aurait été de .... pas de ....

Plan

Propriété et définition :

Si une quantité subit n évolutions successives (augmentations ou diminutions) de taux t_1, t_2, $\ldots$, t_n à partir d'une valeur initiale y_1, alors la quantité finale est :

$$\ldots$$

...
est le *coefficient multiplicateur global*.
...
est le *taux global*.

Exemple :
La population d'une ville augmente de 2,3% en un an puis diminue de 3,4% les deux années suivantes.
...
Le coefficient multiplicateur global est donc ....
Le taux global d'évolution est .... soit une baisse de ....
Attention : ce n'est pas la somme des taux successifs : ....

Plan

Propriété et définition :

Si une quantité subit 2 évolutions successives de taux t_1 et t_2, on appelle alors *coefficient multiplicateur moyen* le nombre

...

et on appelle *taux moyen* le taux qui lui est associé, c'est à dire le nombre

...

Exemple :
Un prix initial de 100 € subit une augmentation de 2 % puis une baisse de 30 %.
...
Le coefficient multiplicateur global est ....
...
Le coefficient multiplicateur moyen est ....
En outre, ... soit .... de baisse annuelle en moyenne.

Définition :

On appelle *indice* i de base 100 d'une quantité y_2 par rapport à une quantité y_2, le nombre :

$$\ldots$$

Exemple :

On suit l'évolution du prix d'un produit : il valait 16 € en 2006 et vaut 18,2 € en 2007.

...

L'indice du prix en 2007 par rapport à 2006 est donc ....

Propriété :

Soit t le taux d'évolution d'une quantité y_1 à une quantité y_2. On suppose que l'on connaît l'indice i de y_2 par rapport à y_1. Alors

...

Preuve :
On a $i = \frac{y_2}{y_1} \times 100$ par définition donc $\frac{y_2}{y_1} = \frac{i}{100}$. D'autre part, $t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$ par définition. Par conséquent,

$$\begin{aligned} t &= \frac{y_2}{y_1} - \frac{y_1}{y_1} \\ &= \frac{y_2}{y_1} - 1 \\ &= \frac{i}{100} - 1 \end{aligned}$$

Exemples :

On prend pour référence de l'indice des prix des produits manufacturés l'année 2004.

- Si l'indice en 2005 vaut 105,3 alors le taux d'augmentation entre 2004 et 2005 a été de :

  ...

- Si entre 2004 et 2006, les prix ont augmenté de 9,7 % alors l'indice des prix en 2006 est :

  ...

Propriété :

> Le taux d'évolution entre deux quantités est égal au taux d'évolution
> ...

Preuve :
Soient y la quantité de référence pour le calcul des indices, y_1 et y_2 les deux quantités, i_1 et i_2 les indices correspondants.
Le taux d'évolution entre les quantités y_1 et y_2 est donné par :

$$t = \frac{y_2 - y_1}{y_1}$$

Or $i_1 = \frac{y_1}{y} \times 100$ donc $y_1 = \frac{y \times i_1}{100}$ et de même $y_2 = \frac{y \times i_2}{100}$. Donc $t = \frac{\frac{y \times i_2}{100} - \frac{y \times i_1}{100}}{\frac{y \times i_1}{100}}$ ce qui donne par simplification $t = \frac{y \times i_2 - y \times i_1}{y \times i_1}$ donc $t = \frac{i_2 - i_1}{i_1}$.

Exemple :
On étudie le chiffre d'affaires d'une entreprise sur plusieurs années :

Année	2001	2002	2003
Chiffre d'affaires	2500	2875	3125
Indice	100	....	....

L'indice du chiffre d'affaires de 2002 par rapport à 2001 est :
...
Celui de 2003 par rapport à 2001 est :
...
Le taux d'évolution entre 2002 et 2003 est :
...
soit environ ....

Propriété :

- Pour t « proche » de 0, $(1+t)^2 \approx 1+2t$. Deux évolutions successives pour un taux t voisin de 0 reviennent donc approximativement à une évolution de taux

  ...
- Pour t « proche » de 0, $(1+t)^n \approx 1+nt$ pour tout entier naturel n. n évolutions successives de taux t voisin de 0 reviennent donc approximativement à une évolution de taux ....

Propriété :

Pour t « proche » de 0, $\frac{1}{1+t} \approx 1 - t$.
Le taux réciproque d'une évolution pour un taux t voisin de 0 est donc approximativement de ...

Exemple (début) :

- Un prix subit une augmentation de 0,2 %. Le prix après augmentation est alors de 70 €.
  Calcul du prix initial :
  ...
  soit environ 69,86027.
  Calcul du prix initial approché à l'aide de la propriété énoncée :
  ...
  soit exactement 69,86.
  Il y a donc une différence mais compte tenu de la situation elle est négligeable.

Exemple (suite) :

- Par contre, supposons que l'augmentation est maintenant de 2 %. Calcul du prix initial :
  ...
  soit environ 68,63.
  Calcul du prix initial approché à l'aide de la propriété énoncée :
  ...
  soit environ 68,60.
  La différence n'est plus négligeable.