Suites numériques, TSTG

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

30 mai 2009

Plan

Définition

Definition

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n par la relation :

....

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 56$ et $u_{n+1} = u_n - 4$. (u_n) est une suite arithmétique de raison ....
On a $u_1 = \ldots\ldots\ldots$
$u_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots$
$u_3 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Expression en fonction de n

Propriété

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de r, alors :

- *si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n,*

$$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

- *si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n,*

$$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Expression en fonction de n

Exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$.
On a par exemple, $u_{12} =$ ....
ou encore $u_{15} =$ ....

Reconnaissance de suites arithmétiques

Propriété

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0.
(u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n .... si et seulement il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n, u_n s'écrit .... Dans ce dernier cas on a $u_0 =$ .... et la raison de la suite est ....

Reconnaissance de suites arithmétiques

Exemple :
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -3 + 2(n-1)$. u_n s'écrit $u_n =$ .... donc $u_n =$ .... donc elle est arithmétique de raison $r =$ ..... et de premier terme $u_0 =$ ....

Variations et représentation graphique

Propriété

On considère une suite (u_n). (u_n) *est une suite arithmétique si et seulement si les points constituant sa représentation graphique dans un repère du plan sont ....*

Propriété

On considère une suite arithmétique de raison r.

- *Si* $r > 0$ *alors la suite est .... ;*
- *si* $r < 0$ *alors la suite est .... ;*
- *si* $r = 0$ *alors la suite est ....*

Recherche de la raison d'une suite arithmétique

Propriété

Soit (u_n) une suite arithmétique et p et n deux entiers naturels distincts.
Alors la raison r de la suite est donnée par :

$$r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exemple :
Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison r de la suite et le premier terme u_0.On a :
$r = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
En outre ....

Plan

Sommes de termes

Propriété

- *Pour tout entier naturel n,*

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- *Pour toute suite* $(u_n)_n$ *et tout entier naturel n :*

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou pour tout entier naturel $p < n$*,*

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Somme de termes

Exemple :
Un cycliste décide de reprendre l'entraînement en vue d'une course de la manière suivante : le premier jour il parcourt 50 km et chaque jour suivant il parcourt 10 km de plus. On définit ainsi une suite arithmétique (u_n) où u_n est la longueur parcourue le n ième jour. (u_n) a donc pour raison 10 et pour premier terme $u_1 = 50$. Le 7e jour, le cycliste aura parcouru .... soit .... km. Après 7 jours d'entraînement le cycliste aura parcouru au total $u_1 + u_2 + \ldots + u_7 =$ .... soit 560 km cumulés.

Plan

Définition

Definition

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

...

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1.
(u_n) est une suite géométrique de raison ....
On a $u_2 = \ldots\ldots$
$u_3 = \ldots\ldots\ldots$
$u_4 = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Expression en fonction de n

Propriété

Si $(u_n)_n$ est une suite de raison q et de premier terme :

- *u_0, alors $u_n =$ .... ;*
- *u_1, alors $u_n =$ ....*

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = \ldots\ldots$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$. On a par exemple :
$u_{12} =$ ....

Reconnaissance de suites géométriques

Propriété

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0.
La suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tous les entiers naturels n, ... si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n, ... Dans ce dernier cas, on a $u_0 =$ .... et la raison de la suite est ....

Exemple :
La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3}{2^n}$. v_n s'écrit .... donc .... d'où la suite (v_n) est géométrique de raison .... et de premier terme ......

Variations et limites de suites géométriques

Propriété

Soit q un réel strictement positif différent de 1 et u_0 un réel strictement positif. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = u_0 q^n$ pour tout entier naturel n. Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est .... et pour tout entier M aussi grand que l'on veut, on peut trouver un rang n tel que pour tous les rangs plus grands que n les valeurs de (q^n) sont au dessus de M entier. On dit que la suite a pour limite $+\infty$ et on écrit .... ;

Variations et limites de suites géométriques

Propriété

Si $0 < q < 1$*, alors la suite* (u_n) *est .... et pour tout nombre m strictement positif aussi petit que l'on veut, on peut trouver un entier n tel que pour tous les rangs supérieurs à n, les valeurs de* (q^n) *sont plus petites que m. On dit la suite* (q_n) *a pour limite 0 et on écrit*

....

Variations et limites de suites géométriques

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Comme la raison est inférieure strictement à 1, la suite (u_n) est .... et admet pour limite ....

Plan

1. Suites arithmétiques
   - Propriétés des suites arithmétiques
   - Sommes de termes
2. Suites géométriques
   - Propriétés des suites géométriques
   - Sommes de termes

Sommes de termes

Propriété

Si $(u_n)_n$ est une suite de raison q et de premier terme u_0, alors si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, on a :

- *si* $q = 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0$;
- *si* $q \neq 1$,

$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{u_0(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

ou plus généralement pour tout entier p inférieur à n

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n = \ldots\ldots$$

Sommes de termes

Exemple :

Une personne doit, pour rembourser un prêt, verser 1500 euros la première année, puis 5% de plus par an chaque année pendant 19 ans. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 1,05 et de premier terme 1500.
On a $v_0 + v_1 + ... + v_{19} = ...$ Au bout de 20 ans la somme remboursée s'élève à 49 598,93 euros.