

Suites numériques, cours, classe de terminale STG

1 Suites arithmétiques

1.1 Propriétés des suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier *terme* et pour tout entier naturel n par la relation :

.....

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 56$ et $u_{n+1} = u_n - 4$. (u_n) est une suite arithmétique de raison

.....

On a $u_1 = \dots\dots\dots$

$u_2 = \dots\dots\dots$

$u_3 = \dots\dots\dots$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite *arithmétique* de *raison* r , alors :

- si le premier *terme* est u_0 , alors pour tout entier n ,

$$u_n = \dots\dots\dots$$

- si le premier *terme* est u_1 , alors pour tout entier n ,

$$u_n = \dots\dots\dots$$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = \dots\dots\dots$$

Exemple : Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$.

On a par exemple, $u_{12} = \dots\dots\dots$

ou encore $u_{15} = \dots\dots\dots$

Propriété :

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0 .
 (u_n) est arithmétique
 si et seulement si il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n
 si et seulement il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n , u_n s'écrit
 Dans ce dernier cas on a $u_0 = \dots$ et la raison de la suite est

Exemple :

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -3 + 2(n - 1)$. u_n s'écrit $u_n = \dots$ donc $u_n = \dots$ donc elle est arithmétique de raison $r = \dots$ et de premier terme $u_0 = \dots$

Propriété :

On considère une suite (u_n) . (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si les points constituant sa représentation graphique dans un repère du plan sont

Propriété :

On considère une suite arithmétique de raison r .

- Si $r > 0$ alors la suite est
- si $r < 0$ alors la suite est
- si $r = 0$ alors la suite est

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique et p et n deux entiers naturels distincts. Alors la raison r de la suite est donnée par :

$$r = \dots$$

Exemple :

Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison r de la suite et le premier terme u_0 . On a :

$r = \dots$ En outre

1.2 Sommes de termes

Propriété :

- Pour tout entier naturel n ,

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \dots\dots\dots$$

- Pour toute suite arithmétique $(u_n)_n$ et tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \dots\dots\dots$$

ou pour tout entier naturel $p < n$,

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n = \dots\dots\dots$$

Exemple :

Un cycliste décide de reprendre l'entraînement en vue d'une course de la manière suivante : le premier jour il parcourt 50 km et chaque jour suivant il parcourt 10 km de plus. On définit ainsi une suite arithmétique (u_n) où u_n est la longueur parcourue le n ième jour. (u_n) a donc pour raison 10 et pour premier terme $u_1 = 50$. Le 7^e jour, le cycliste aura parcouru soit km. Après 7 jours d'entraînement le cycliste aura parcouru au total $u_1 + u_2 + \dots + u_7 = \dots\dots\dots$ soit 560 km cumulés.

2 Suites géométriques

2.1 Propriétés des suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

...

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1. (u_n) est une suite géométrique de raison

On a $u_2 = \dots\dots$

$$u_3 = \dots\dots\dots$$

$$u_4 = \dots\dots\dots$$

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite **géométrique** de raison q et de premier terme :

- u_0 , alors $u_n = \dots$;
- u_1 , alors $u_n = \dots\dots\dots$

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = \dots\dots$$

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$. On a par exemple :
 $u_{12} = \dots\dots\dots$

Propriété :

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0 .

La suite (u_n) est une suite géométrique

si et seulement si il existe un réel q tel que pour tous les entiers naturels n , $\dots\dots\dots$

si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n , $\dots\dots\dots$

Dans ce dernier cas, on a $u_0 = \dots\dots\dots$ et la raison de la suite est $\dots\dots\dots$

Exemple :

La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3}{2^n}$. v_n s'écrit $\dots\dots\dots$ donc $\dots\dots\dots$ d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $\dots\dots\dots$ et de premier terme $\dots\dots\dots$

Propriété :

Soit q un réel strictement positif différent de 1 et u_0 un réel strictement positif. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = u_0 q^n$ pour tout entier naturel n .

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est
et pour tout entier M aussi grand que l'on veut, on peut trouver un rang n tel que pour tous les rangs plus grands que n les valeurs de (q^n) sont au dessus de M entier.
On dit que la suite a pour limite $+\infty$ et on écrit ;
- si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est
et pour tout nombre m strictement positif aussi petit que l'on veut, on peut trouver un entier n tel que pour tous les rangs supérieurs à n , les valeurs de (q^n) sont plus petites que m .
On dit la suite (q_n) a pour limite 0 et on écrit

Exemple :

Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Comme la raison est inférieure strictement à 1, la suite (u_n) est et admet pour limite

2.2 Sommes de termes**Propriété :**

Si $(u_n)_n$ est une suite **géométrique** de raison q et de premier terme u_0 , alors si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, on a :

- si $q = 1$, $u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1)u_0$;
- si $q \neq 1$,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{u_0(q^{n+1} - 1)}{q - 1}$$

ou plus généralement pour tout entier p inférieur à n

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_{n-1} + u_n = \dots$$

Exemple :

Une personne doit, pour rembourser un prêt, verser 1500 euros la première année, puis 5% de plus par an chaque année pendant 19 ans. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 1,05 et de premier terme 1500.

On a $v_0 + v_1 + \dots + v_{19} = \dots$

Au bout de 20 ans la somme remboursée s'élève à 49 598,93 euros.