Dérivation de fonctions, cours, terminale STG

F.Gaudon

27 mai 2009

Table des matières

1 Suites arithmétiques **2**

1.1 Propriétés des suites arithmétiques 2

1.2 Sommes de termes 3

2 Suites géométriques **5**

2.1 Propriétés des suites géométriques 5

2.2 Sommes de termes 6

1 Suites arithmétiques

1.1 Propriétés des suites arithmétiques

Définition :

Soit r un nombre réel. On appelle *suite arithmétique* de *raison* r toute suite définie par son premier terme et pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 56$ et $u_{n+1} = u_n - 4$. (u_n) est une suite arithmétique de raison -4. On a $u_1 = u_0 - 4 = 56 - 4 = 52$, $u_2 = 52 - 4 = 48$, $u_3 = 48 - 4 = 44$.

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite arithmétique de raison r, alors :
- si le premier terme est u_0, alors pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + nr$$

- si le premier terme est u_1, alors pour tout entier n,

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

De manière plus générale, pour tous les entiers naturels n et p avec $p < n$ on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite arithmétique de raison -4 et de premier terme $u_0 = 56$. On a par exemple, $u_{12} = u_0 + 12r = 56 + 12 \times (-4) = 8$ ou encore $u_{15} = u_12 + 3r = 8 + 3 \times (-4) = 8 - 12 = -4$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0.
(u_n) est arithmétique si et seulement si il existe un nombre réel r tel que pour tout entier naturel n $u_{n+1} = u_n + r$ si et seulement il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n, u_n s'écrit $u_n = an + b$. Dans ce dernier cas on a $u_0 = b$ et la raison de la suite est a.

Exemple :
Soit la suite (u_n) définie par $u_n = -3 + 2(n-1)$. u_n s'écrit $u_n = -3 + 2n - 2$ donc $u_n = -5 + 2n$ donc elle est arithmétique de raison $r = 2$ et de premier terme $u_0 = -5$.

Propriété :

On considère une suite (u_n). (u_n) est une suite arithmétique si et seulement si les points constituant sa représentation graphique dans un repère du plan sont alignés.

Propriété :

On considère une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite est strictement croissante ;
- si $r < 0$ alors la suite est strictement décroissante ;
- si $r = 0$ alors la suite est constante.

Propriété :

Soit (u_n) une suite arithmétique et p et n deux entiers naturels distincts. Alors la raison r de la suite est donnée par :

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$$

Exemple :
Soit (u_n) une suite arithmétique vérifiant $u_{10} = 34$ et $u_{16} = 43$. On recherche la raison de la suite. On a $u_{16} = u_{10} + 6 \times r$ où r est la raison de la suite. D'où $43 = 34 + 6r$ c'est à dire $r = \frac{43-34}{6} = 1,5$.

1.2 Sommes de termes

Propriété :

- Pour tout entier naturel n,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Pour toute suite arithmétique $(u_n)_n$ et tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

ou pour tout entier naturel $p < n$,

$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n$$

$$= \frac{\text{nombre de termes} \times (\text{premier terme} + \text{dernier terme})}{2}$$

Preuve :

- On a :

$$\begin{aligned}
&(1+2+3+\ldots+n)+(1+2+3+\ldots+n)\\
&=(1+2+3+\ldots+n)+(n+(n-1)+(n-2)+\ldots+3+2+1)\\
&=(1+n)+(2+(n-1))+(3+(n-2))+\ldots+((n-1)+2)+(n+1)\\
&=(n+1)+(n+1)+(n+1)+\ldots+(n+1)+(n+1)+(n+1)\\
&=n(n+1)
\end{aligned}$$

  donc

$$2(1+2+3+\ldots+n)=n(n+1)$$

  d'où le résultat.
- On a :

$$\begin{aligned}
&u_0+u_1+\ldots+u_{n-1}+u_n\\
&=u_0+(u_0+r)+(u_0+2r)+\ldots+(u_0+(n-1)r)+(u_0+nr)\\
&=(n+1)u_0+(r+2r+3r+\ldots+(n-1)r+nr)\\
&=(n+1)u_0+r(1+2+3+\ldots+(n-1)+n)\\
&=(n+1)u_0+r\frac{n(n+1)}{2}\\
&=\frac{2(n+1)u_0+rn(n+1)}{2}\\
&=(n+1)\frac{u_0+u_0+nr}{2}\\
&=(n+1)\frac{u_0+u_n}{2}
\end{aligned}$$

Exemple :

Un cycliste décide de reprendre l'entraînement en vue d'une course de la manière suivante : le premier jour il parcourt 50 km et chaque jour suivant il parcourt 10 km de plus. On définit ainsi une suite arithmétique (u_n) où u_n est la longueur parcourue le n ième jour. (u_n) a donc pour raison 10 et pour premier terme $u_1=50$. Le 7$^{\text{e}}$ jour, le cycliste aura parcouru $50+6\times 10=110km$. Après 7 jours d'entraînement le cycliste aura parcouru au total $u_1+u_2+\ldots+u_7=7\times\frac{50+110}{2}=560$ soit 560 km cumulés.

2 Suites géométriques

2.1 Propriétés des suites géométriques

Définition :

Soit q un réel. On appelle suite *géométrique* de *raison* q toute suite définie par son premier terme u_0 (ou u_1) et telle que pour tout entier naturel $n \geq 0$ (ou $n \geq 1$) :

$$u_{n+1} = qu_n$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par $u_1 = 3$ et $u_{n+1} = 2u_n$ pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1. (u_n) est une suite géométrique de raison 2. On a $u_2 = 3 \times 2 = 6$, $u_3 = 6 \times 2 = 12$, $u_4 = 12 \times 2 = 24$, etc.

Propriété (expression en fonction de n) :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier :
- u_0, alors $u_n = q^n u_0$;
- u_1, alors $u_n = q^{n-1} u_1$.

De manière plus générale, si p et n sont des entiers naturels tels que $p < n$, on a :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = 2$. On a par exemple $u_{12} = u_0 \times q^{12} = 5 \times 2^{12} = 5 \times 4096 = 20480$.

Propriété :

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0.
La suite (u_n) est une suite géométrique si et seulement si il existe un réel q tel que pour tous les entiers naturels n, $u_{n+1} = qu_n$ si et seulement si il existe deux nombres réels a et b tels que pour tout entier naturel n, $u_n = ab^n$. Dans ce dernier cas, on a $u_0 = a$ et la raison de la suite est b.

Exemple :
La suite (v_n) définie par $v_n = \frac{3}{2^n}$. v_n s'écrit $3 \times \frac{1}{2^n}$ donc $3 \times (\frac{1}{2})^n$ d'où la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 3.

Propriété :

Soit q un réel strictement positif différent de 1 et u_0 un réel strictement positif. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = u_0 q^n$ pour tout entier naturel n.

- Si $q > 1$, alors la suite (u_n) est strictement croissante et pour tout entier M aussi grand que l'on veut, on peut trouver un rang n tel que pour tous les rangs plus grands que n les valeurs de (q^n) sont au dessus de M entier. On dit que la suite a pour limite $+\infty$ et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$;
- si $0 < q < 1$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante et pour tout nombre m strictement positif aussi petit que l'on veut, on peut trouver un entier n tel que pour tous les rangs supérieurs à n, les valeurs de (q^n) sont plus petites que m. On dit la suite (q_n) a pour limite 0 et on écrit $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exemple :
Soit (u_n) la suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$. Comme la raison est inférieure strictement à 1, la suite (u_n) est décroissante strictement et admet pour limite 0.

2.2 Sommes de termes

Propriété :

Si $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0, alors si n est un entier naturel supérieur ou égal à 1, on a :

- si $q = 1$, $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)u_0$;
- si $q \neq 1$,
$$u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \frac{u_0(q^{n+1}-1)}{q-1}$$
ou plus généralement pour tout entier p inférieur à n
$$u_p + u_{p+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n = \text{premier terme} \times \frac{\text{raison}^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

Preuve :
On a

$$\begin{aligned}&u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1}\\ &= u_0 + u_0 \times q + u_0 \times q^2 + u_0 \times q^3 + \ldots + u_0 \times q^{n-1} + u_0 \times q^n\\ &= u_0(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n)\end{aligned}$$

Or, pour tout réel $q \neq 1$, $(q-1)(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} + q^n) = q^{n+1} - 1$.
Donc $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1} = u_0 \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Si $q = 1$, $u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_{n-1} + u_{n+1} = u_0(1 + 1 + 1^2 + 1^3 + \ldots + 1^{n-1} + 1^n) = u_0 \times (n+1)$.

Exemple :
Une personne doit, pour rembourser un prêt, verser 1500 euros la première année, puis 5% de plus par an chaque année pendant 19 ans. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 1,05 et de premier terme 1500.
On a $v_0 + v_1 + ... + v_{19} = \frac{1{,}05^{19+1} - 1}{1 - 1{,}05} \times 1500 \approx 49598,93$
Au bout de 20 ans la somme remboursée s'élève à 49 598,93 euros.