Optimisation linéaire, TSTG

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

30 mai 2009

1. Régionnement du plan
   - Propriétés graphiques des inéquations linéaires à deux variables
   - Méthode de résolution graphique des inéquations linéaires à deux inconnues
   - Résolution graphique de systèmes d’inéquations linéaires à deux variables
2. Programmation linéaire

Plan

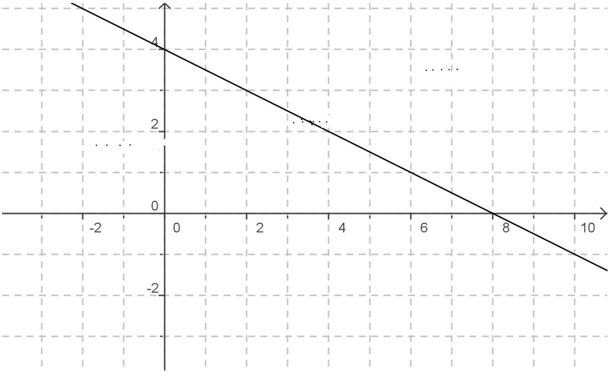
Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère. La droite $\mathcal{D}$ d'équation .... où a, b et c sont des réels fixés avec $(a; b) \neq (0; 0)$ détermine deux demi-plans de frontière $\mathcal{D}$:

- l'un est l'ensemble des points dont les coordonnées sont les solutions de l'inéquation linéaire .... ;
- l'autre est l'ensemble des points dont les coordonnées sont les solutions de l'inéquation linéaire ....

Propriété :

Soit $(O;\vec{i};\vec{j})$ un repère et $\mathcal{D}$ une droite d'équation $y = mx + p$. Les solutions de l'inéquation $y \leq mx + p$ (resp. $y \geq mx + p$)sont les coordonnées des points du demi-plan situé .... (resp. .... de la droite $\mathcal{D}$.


4
2
0
-2
-2
0
2
4
6
8
10
. . . . .
. . . . .
. . . .

Plan

Méthode :

On considère une inéquation de la forme $ax+by+c \leq 0$ ou $ax+by+c \geq 0$ avec $(a;b) \neq (0;0)$
Pour représenter graphiquement les solutions d'une telle inéquation dans un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

- on écrit l'inéquation sous la forme .... ou .... ou .... ou .... où m, p et k sont des réels ;
- on trace dans le repère la droite d'équation .... ou .... ;
- on garde le demi-plan contenant les solutions d'après la propriété précédente.

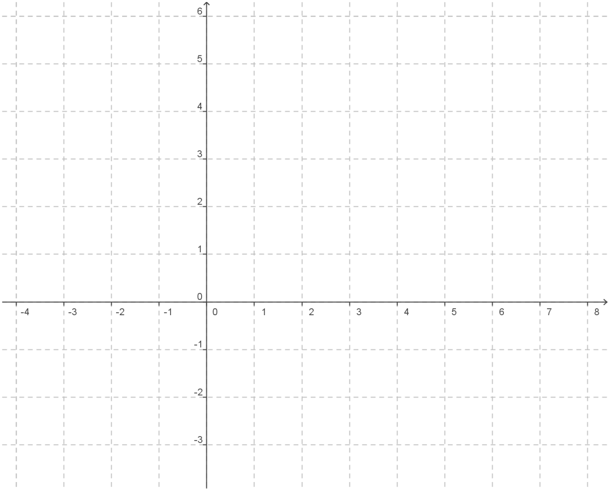
Exemple :

Résolution graphique de l'inéquation $3x + 2y \leq 4$.

- On met l'inéquation sous la forme réduite : ....
- on trace la droite d'équation ....

x	...	...
y	...	...

- on hachure le demi-plan qui ne convient pas.


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Plan

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan. Soit le système d'inéquations linéaires à deux variables $\mathcal{S}$:

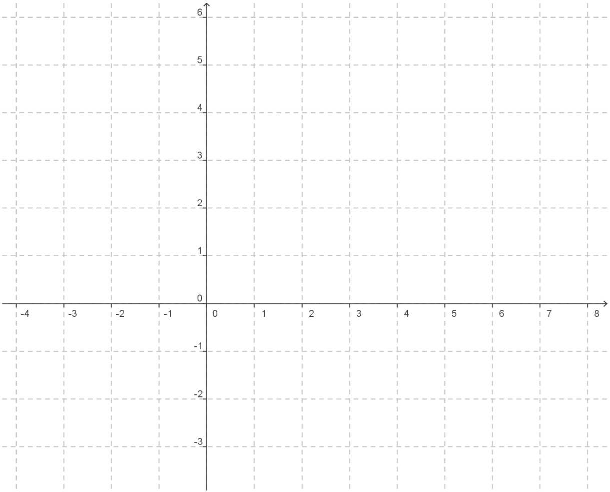
$$\begin{cases} (E_1) \\ (E_2) \\ \quad \dots \\ (E_n) \end{cases}$$

où (E_1), (E_2), ..., (E_n) sont des inéquations de la forme $ax + by \leq c$ ou $ax + by \geq c$.
Les solutions de ce système sont les points du repère dont les coordonnées vérifient *toutes* les équations $(E_1$, (E_2), ..., (E_n). Il se trouvent à *l'intersection* de chacun des demi-plans définis par ces inéquations.

Exemple :
On considère le système d'inéquations suivant :

$$\begin{cases} 0 & \leq x \leq & 4 \\ y & \geq 0 & \\ x + 2y - 4 & \leq & 0 \end{cases}$$

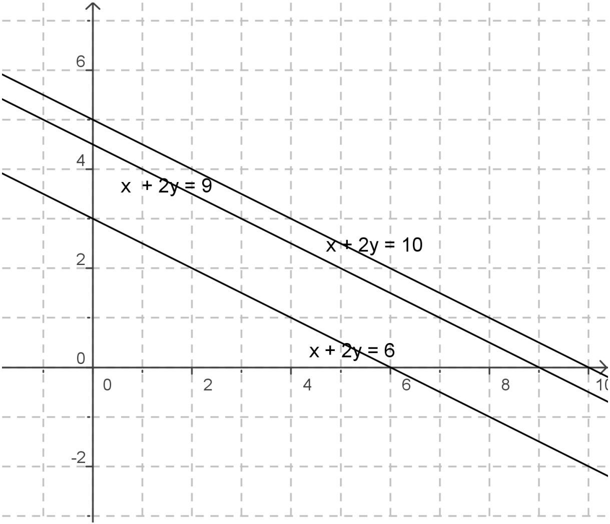
- On met les inéquations qui le nécessitent sous la forme réduite : on a $x + 2y - 4 \leq 0$ qui équivaut à .... c'est à dire ....
- On trace les droites d'équation $y = -\frac{x}{2} + 2$, $x = ...$, $x = ...$ et $y = ...$
- On hachure les parties du plan qui ne conviennent pas.


6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère du plan.

- Les droites qui ont une équation de la forme $ax + by = k$ où a et b sont deux réels et k est un réel que l'on fait varier, sont des droites parallèles de coefficient directeur $\frac{-a}{b}$;
- pour des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ d'équations $ax + by = k_1$ et $ax + by = k_2$ où k_1 et k_2 sont deux réels tels que $k_1 < k_2$, $\mathcal{D}_1$ coupe l'axe des ordonnées .... de $\mathcal{D}_2$.


6
4
2
0
-2
0
2
4
6
8
10
x + 2y = 9
x + 2y = 10
x + 2y = 6