Probabilités conditionnelles, cours, terminale STG

F.Gaudon

28 mai 2009

Table des matières

1 Notion de probabilité conditionnelle

Définition :

Pour tout événement A et tout événement B non impossible, on appelle *probabilité conditionnelle de A sachant B* et notée $P_B(A)$ le nombre

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B}$$

Exemple :

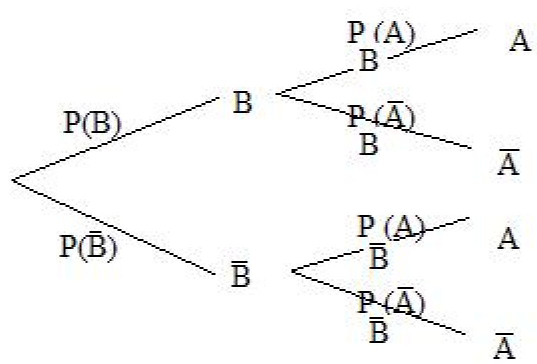
Lors d'un sondage, 50% personnes des interrogées déclarent pratiquer un sport régulièrement et 75% des personnes interrogées déclarent aller au cinéma régulièrement. De plus, 40% des personnes déclarent faire du sport et aller au cinéma régulièrement. On interroge à nouveau une de ces personnes au hasard et on considère les événements « la personne interrogée pratique un sport régulièrement » et « la personne interrogée va au cinéma régulièrement » que l'on notent S et C respectivement. On cherche à calculer la probabilité que la personne pratique un sport régulièrement sachant qu'elle va régulièrement au cinéma.

On a $P(C) = 0,75$ et $P(S \cap C) = 0,4$. Donc $P_C(S) = \frac{P(S \cap C)}{P(C)} = \frac{0,4}{0,75} \approx 0,53$.

Remarque :

Soient A et B deux événements non impossibles d'un univers donné. La connaissance de la probabilité d'un événement B et de la probabilité conditionnelle d'un événements A sachant B permet de retrouver la probabilité $P(A \cap B)$ de l'intersection de A et B avec la formule $P(A \cap B) = P_B(A)P(B)$.

2 Arbre pondérés



Définition :

Le schéma ci-dessus est appelé *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités*. Il comporte 4 *chemins* : $A \cap B$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$. Un *noeud* est un point d'où partent plusieurs branches.

Propriété :

Dans un *arbre pondéré* ou *arbre à probabilités* comme ci-dessus,
- La somme des probabilités portées sur les branches issues d'un même noeud est égale à 1 (par exemple, $P_B(A) + P_B(\bar{A}) = 1$) ;
- la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités portées par ses branches (par exemple, $P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)$) ;
- la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui le compose(par exemple, $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B})$).

Exemple :
La tableau suivant montre la répartition du personnel dans une usine :

	Cadres	Ouvriers	Total
Hommes	100	200	300
Femmes	50	150	200
Total	150	350	500

On rencontre un employé au hasard. On note H l'événement « l'employé rencontré est un homme » et C l'événement « l'employé rencontré est un cadre ».

On a $P(H) = \frac{300}{500} = 0,6$, $P_H(C) = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ et $P_H(\bar{C}) = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$. On a bien $P_H(C) + P_H(\bar{C}) = 1$. En outre, $P(H \cap C) = P(H) \times P_H(C) = 0,6 \times \frac{1/3}{=} 0,2$ et $P(C) = P(C \cap H) + P(C \cap \bar{H})$.

3 Indépendance d'événements

Définition :

On dit que deux événements A et B sont *indépendants* lorsque

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Remarque :
Si $P(B) \neq 0$ alors deux événements A et B sont indépendants à condition que $P_B(A) = P(A)$ (ou $P_A(B) = P(B)$ si $P(A) \neq 0$), ce qui signifie que la probabilité que l'un des deux événements se réalise ne dépend pas de la probabilité que l'autre se réalise.

Exemple :
On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On appelle A l'événement « on tire un as », T l'événement « on tire un trêfle » et N l'événement « on tire une carte noire ». On a $P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{8}$ et $P(N) = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$.

D'une part $A \cap T$ est l'événement « on tire l'as de trêfle » et $P(A)P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$ qui est bien égal à $P(A \cap T)$ ce qui montre que A et T sont indépendants.

D'autre part, $T \cap N$ est l'événement « on tire un trêfle et une carte noire » dont la probabilité est $\frac{1}{4}$ mais on a $P(T)P(N) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq P(T \cap N)$ ce qui confirme que les événements T et N ne sont évidemment pas indépendants.