Fonction logarithme népérien, TSTG

F. Gaudon

http://mathsfg.net.free.fr

30 mai 2009

Historiquement la fonction logarithme népérien a été introduite vers les XV^{e} XVI^{e} siècles afin de simplifier les calculs astronomiques. En particulier la problématique était de rechercher une fonction transformant les multiplications en additions (source : document d'accompagnement des programmes de terminale STG).

Propriété et définition :

Il existe une unique fonction notée ln définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ dont la dérivée est

$$\ln'(x) = \dots$$

et qui vérifie

$$\ln(1) = \dots$$

Cette fonction est appelée *fonction logarithme népérien*.

Propriété :

Pour tous les réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Preuve :
Admise.

Exemples :
Cette propriété permet de transformer les multiplications en additions :

- $\ln(6) = ...$
- $\ln(9) = ...$
- $\ln(32) = ...$

Conséquences :

Pour tous les réels a et b strictement positifs,

- $\ln(\frac{1}{b}) = ...$
- $\ln(\frac{a}{b}) = ...$
- pour tout entier relatif n, $\ln(a^n) = ...$
- $\ln(\sqrt{a}) = ...$

Preuve :

- D'une part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = ...$
  D'autre part, $\ln(b \times \frac{1}{b}) = ...$
  Donc $\ln(b) + \ln(\frac{1}{b}) = ...$ d'où $\ln(\frac{1}{b}) = ...$
- $\ln(\frac{a}{b}) = \ln(a \times \frac{1}{b}) = ...$
- Découle directement du fait que
  $\ln(a^n) = \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{n \text{ fois}}.$
- $\ln(a) = \ln(\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = ...$

Exemple :
On peut ainsi manipuler de très grands nombres ou de très petits nombres :

- $\ln(100\,000) = ...$
- $\ln(1/10^8) = ...$

Plan

Propriété :

$\boxed{\text{ln est .... sur }]0;+\infty[.}$

Preuve :
Découle du fait que pour tout x réel strictement positif, $\ln'(x) = ...$

Propriété et définition :

Il existe un unique réel dont le logarithme népérien vaut 1, on appelle e cet unique réel tel que .... Ce nombre e est appelé ....

Preuve :
Découle de l'hypothèse que ln est dérivable sur .... et strictement croissante sur ....

Plan

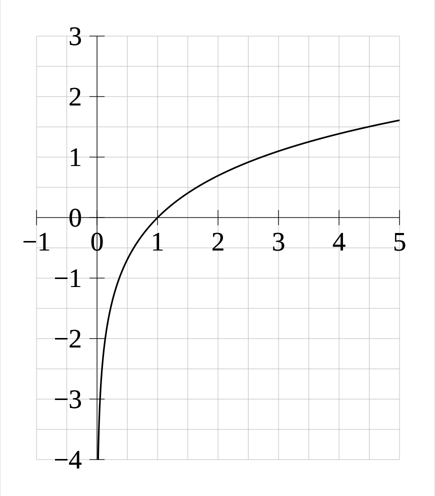
x	0		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\|$	....	
$\ln(x)$	$\|$	....	

Plan

x	0		...		$+\infty$
$\ln(x)$	$\parallel$	...	...	...	

Plan

On parle de .... pour décrire une telle évolution.



Propriété :

- $\ln(a) = \ln(b)$ si et seulement si ....
- $\ln(a) \geq \ln(b)$ si et seulement si .....

Preuve :
Découle de l'hypothèse que ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et strictement croissante.

Exemple 1 :
$\ln(x-1)=0$

Étape 1 : *Détermination de l'ensemble de définition*.
On a .... si et seulement si .... donc l'ensemble de définition est ....

Étape 2 : *Résolution de l'équation*.
On a $\ln(x-1)=0$ qui s'écrit $\ln(x-1)=\ln(.......)$ ce qui équivaut à .... donc .... Comme .... est dans l'ensemble de définition ...., ... est donc l'unique solution de l'équation.

Exemple 2 :
$\ln(x-1) = 2$

Étape 1 : L'ensemble de définition est le même .... que dans l'exemple précédent.

Étape 2 : $\ln(x-1) = 2$ s'écrit $\ln(x-1) = 2\ln(\ldots\ldots\ldots)$ ce qui équivaut à $\ln(x-1) = \ln(\ldots\ldots)$ donc .... et .... (on ne peut pas simplifier davantage sans perdre la valeur exacte). Comme .... appartient à l'ensemble de définition ...., ... est l'unique solution.

Exemple 3 :
$\ln(2x - 1) < 5$

Étape 1 : *Détermination de l'ensemble de définition*.
On a .... qui donne .... donc l'ensemble de définition est ....

Étape 2 : *Résolution de l'inéquation*.
$\ln(2x - 1) < 5$ s'écrit aussi $\ln(2x - 1) < 5\ln(...............)$ c'est à dire $\ln(2x - 1) < \ln(.......)$ ce qui équivaut à .... donc à .... et à .... (on ne peut à nouveau pas simplifier plus). Comme .... est dans l'ensemble de définition ...., ... est l'unique solution de l'inéquation.